This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

B 444833 DUPL

MÉMOIRE

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE

A DIVERS PROBLÈMES DE MOUVEMENT RELATIF

PAR

PH. GILBERT

Professeur à l'Université catholique de Louvain.

SECONDE ÉDITION

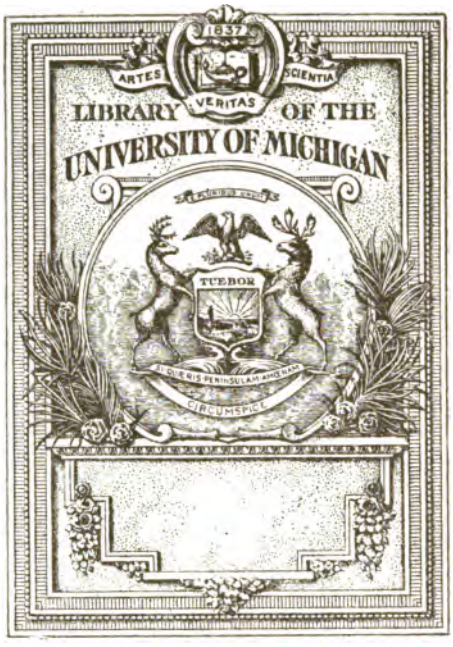
PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1889



THE GIFT OF
PROF. ALEXANDER ZIWET

QA
3
.G465
1889

Alexandre Ziwet 4.2

MÉMOIRE

SUR

L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LAGRANGE

A DIVERS PROBLÈMES DE MOUVEMENT RELATIF

PAR

PH. GILBERT

Professeur à l'Université catholique de Louvain.

SECONDE ÉDITION

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1889

Prof. Alex. Ziwet
gt.
12-23-1922

Réimprimé des *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 6e année, 1882, pp. 270-373, et 7e année, 1883, pp. 11-110.

Bruxelles, imp. de F. Hayez.

AVERTISSEMENT

POUR CETTE SECONDE ÉDITION.

Ce mémoire, publié d'abord dans les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles* (6me et 7me années), était presque épuisé en tirage à part, lorsque le Ministère de l'Instruction publique de France le désigna comme ouvrage à consulter pour le Concours d'agrégation des sciences mathématiques de 1889. C'est alors que le Conseil de la Société scientifique, par une décision dont je lui suis vivement reconnaissant, voulut bien en décider la réimpression.

Ces diverses circonstances, et le temps qui manquait d'ailleurs, ne permettaient pas d'y introduire de trop grandes modifications. Je me suis borné, sur le conseil d'un éminent professeur de la Faculté des sciences de Caen, à développer quelque peu les premières pages qui contiennent les fondements de la méthode, et j'ai ajouté çà et là plusieurs notes indiquant des travaux ou des résultats postérieurs à la première publication.

Pour le reste, mon mémoire est resté tel qu'il a été présenté à l'Institut en 1882 et imprimé en 1883.

PH. G.

413442

INTRODUCTION.

Ce travail est la reproduction, sauf de légers changements de rédaction, du mémoire que j'ai présenté le 30 janvier 1882 à l'Académie des sciences de Paris, et auquel, à la suite d'un savant rapport de M. C. Jordan, elle a accordé l'honneur de l'impression dans les *Mémoires des Savants étrangers* (*).

Dans ce mémoire, je me suis surtout proposé d'étudier les mouvements relatifs d'un système de corps de révolution, par rapport à un système de comparaison animé d'un mouvement de rotation uniforme, en utilisant une équation fort remarquable, due à E. Bour (**). Cette équation, que Bour a établie par des calculs assez longs, approprie aux mouvements relatifs les formules dynamiques de Lagrange, et Bour s'en est servi pour former les équations canoniques de ce mouvement suivant la méthode de Jacobi. Mais sous sa première forme, qui se démontre en quelques lignes, comme on le verra plus loin, cette équation est peut-être la plus commode pour l'étude des mouvements apparents, du moins lorsqu'on interprète géométriquement, comme je l'ai fait, les diverses quantités qui y figurent. On verra avec quelle facilité elle fournit, dans chaque problème, les équations différentielles du mouvement en fonction des variables les plus convenables, sans aucune transformation de coordonnées, sans qu'on doive recourir aux forces fictives de Coriolis.

J'ai eu aussi pour objet de réduire ces mouvements divers et assez compliqués à un petit nombre de types simples, tels que

(*) La Commission était composée de MM. d'Abbadie, Yvon Villarceau, Resal et C. Jordan, rapporteur. Le rapport de M. Jordan a paru dans les *Comptes rendus*, séance du 17 juillet 1882.

(**) *Journal de Liouville*, 2me série, t. VIII, 1863, p. 1. Il s'agit de l'équation (IV) de ce mémoire.

les mouvements pendulaires, de façon qu'ayant poussé jusqu'au bout, par l'emploi des fonctions elliptiques, la solution de ces problèmes types, il me suffit de simples substitutions dans les formules pour obtenir la solution également complète des problèmes gyroscopiques.

La méthode exposée plus haut donne immédiatement les équations de l'équilibre et du mouvement relatif d'un anneau, portant une petite masse additionnelle, et mobile autour d'un axe horizontal entraîné d'un mouvement uniforme autour d'un axe vertical. Les équations montrent que son mouvement se ramène à celui d'*un point pesant sur un cercle tournant uniformément autour d'un diamètre vertical.* C'est là un de ces mouvements types que l'on rencontrera fréquemment dans la suite; c'est pourquoi j'en ai développé complètement la solution, en exprimant les variables en fonction du temps au moyen des fonctions elliptiques. On y rencontre d'ailleurs des particularités intéressantes au point de vue mécanique.

J'étudie ensuite un gyroscope composé d'un disque D auquel on a donné une rotation autour de son axe de figure, d'un anneau intérieur I et d'un anneau extérieur E qui est maintenu en rotation uniforme autour de son diamètre OZ. Je trouve qu'il existe *deux* ou *quatre* positions d'équilibre relatif pour l'axe du disque, suivant la vitesse rotatoire imprimée au tore; que si cette vitesse est nulle, l'axe ne restera pas généralement en équilibre, mais qu'il faut pour cela que les moments d'inertie du tore et de l'anneau I vérifient une relation simple, auquel cas l'équilibre aura lieu sous toute inclinaison. En général, l'oscillation de l'axe du tore par rapport à OZ suivra les mêmes lois que celle du point pesant sur un cercle tournant, dont il est question ci-dessus; elle sera représentée par les formules de ce premier problème. La détermination de la loi de rotation du disque se fait élégamment par les fonctions elliptiques.

Le *polytrope* de M. Sire, appareil destiné à imiter les effets que produit la rotation terrestre sur les corps tournant rapidement à sa surface, fournit une belle application de la méthode. Celle-ci conduit aux équations *rigoureuses* du mouvement du

tore et de ses anneaux, pour une rotation initiale quelconque du tore. Lorsque le tore et les anneaux du gyroscope sont libres, il peut y avoir plusieurs positions d'équilibre pour l'axe du tore, et le mouvement est ramené aux formules qu'a données M. Lottner. Quand l'axe de figure est guidé dans un plan fixe par rapport au méridien tournant, si la rotation initiale du tore est faible, il existe pour l'axe une position d'équilibre stable qui ne coïncide pas avec la projection, sur le plan directeur, de la parallèle à l'axe de rotation du méridien. C'est un résultat curieux, parce qu'il est en contradiction avec ce que le principe du parallélisme des axes nous avait appris, mais *qui n'était applicable qu'à une rotation rapide du tore.* Hors du cas d'équilibre, l'axe de figure du disque suit encore les lois de l'oscillation du pendule simple à plan tournant, données par les formules du premier problème.

Je traite, dans la deuxième partie, les problèmes plus neufs dans lesquels la pesanteur intervient en même temps que la rotation du système de comparaison pour dévier l'axe de figure des corps tournants, mais ici les oscillations de l'axe se rattachent à un nouveau type, *le mouvement d'un point pesant sur un cercle qui tourne uniformément autour d'une verticale ne passant pas par son centre.* Ici encore notre méthode tire immédiatement de l'équation de Bour celle du mouvement du point et les positions d'équilibre relatif. La détermination de ces dernières, qui sont au nombre de *deux* ou de *quatre,* se ramène élégamment à la construction d'une droite passant par un point donné et sur laquelle deux axes rectangulaires interceptent une longueur donnée. Je discute les positions qui appartiennent à l'équilibre stable, et je montre que les formules du mouvement dépendent encore des fonctions elliptiques.

Le curieux *pendule gyroscopique* de M. Sire se prête à une étude complète et rigoureuse par cette méthode, quelles que soient la masse de la chape et la vitesse de rotation initiale du tore. Lorsque celle-ci n'est pas trop considérable, le pendule admet *quatre* positions d'équilibre relatif qui se déterminent comme celles du problème précédent, ce qui rend compte d'un

résultat jusqu'ici inexpliqué, que M. Sire avait rencontré dans ses expériences.

Le mouvement de la tige du pendule, dans le cas général, se ramène aussi au mouvement oscillatoire du point pesant, considéré dans le problème précédent.

Lorsque l'on applique la méthode générale, exposée au § I de ce Mémoire, aux mouvements relatifs d'un corps ou système pesant à la surface d'une planète, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, et que l'on regarde la *pesanteur* comme constante en grandeur et en direction pour tous les points du corps, on obtient l'équation de Bour, et par conséquent les équations différentielles du mouvement, sous une forme très simple qui renferme un théorème général remarquable. L'équation se simplifie encore lorsqu'on suppose, ce qui est le cas dans les expériences faites à la surface de la terre avec le gyroscope de Foucault, que le centre de gravité du corps coïncide avec l'origine O du système de comparaison pendant toute la durée du mouvement. On n'a plus alors à calculer, en fonction des coordonnées que l'on choisit les plus convenables d'après la nature du problème, que la force vive 2T du système dans son mouvement relatif et la quantité V, produit géométrique de l'axe d'impulsion relatif par l'axe instantané OS du système de comparaison. Tel est l'objet du § XI.

Dans les paragraphes suivants, nous appliquons cette méthode à l'étude du mouvement apparent du gyroscope, en tenant compte des termes de l'ordre du carré ω^2 de la vitesse de rotation de la planète, dans les différents cas considérés par les géomètres. Seulement, par suite d'une différence dans le choix de l'hypothèse, nos équations diffèrent de celles de Bour et de M. Lottner, par des termes de l'ordre de ω^2, ce qui nous donne l'occasion d'intégrer par les fonctions elliptiques certaines équations différentielles qui n'avaient pas été traitées ; nous obtenons en fonction explicite du temps les valeurs des angles θ, ψ, φ dont dépend la position du tore et de ses anneaux.

Lorsque l'axe du tore est assujetti à se mouvoir dans un plan fixe par rapport à la planète, ou sur la surface d'un cône fixe,

nous déterminons facilement les positions d'équilibre relatif de l'axe, ce qui nous ramène aux résultats signalés par Foucault. Si cet équilibre n'a pas lieu, c'est encore le mouvement d'un point pesant sur un cercle qui tourne autour d'un diamètre vertical qui représente le type auquel se ramène l'oscillation de l'axe du tore, et une simple application des formules de notre problème I donne la loi exacte de cette oscillation. On trouve, entre autres résultats curieux, que si la rotation de la planète était assez rapide et celle du tore assez lente, son axe, maintenu dans un plan horizontal, oscillerait en restant toujours du même côté du plan méridien.

On n'a guère considéré jusqu'ici, dans l'étude des mouvements apparents à la surface de la terre, les cas où la pesanteur intervient dans le phénomène de la déviation de l'axe du tore sous l'influence de la rotation de la planète; c'est à quoi nous consacrons la quatrième partie de notre mémoire. Le pendule de M. Sire se prête à une étude de ce genre :

Concevons un pendule formé d'un tore D et d'une chape E qui oscille librement autour d'un axe horizontal *ab*, fixe par rapport à la planète, mais que l'on peut orienter de manière à donner au plan d'oscillation tel azimut que l'on veut. Le pendule ayant une inclinaison donnée et le tore une rotation initiale connue, notre méthode fournit de suite les formules du mouvement apparent. On en déduit d'abord cette conclusion, *que la position d'équilibre stable du pendule fera un petit angle avec la verticale*, dans un sens ou dans l'autre suivant le sens de la rotation imprimée au tore, la valeur de cet angle dépendant d'ailleurs de l'azimut du plan d'oscillation du pendule. Si la vitesse du tore était assez grande, cet appareil fournirait un signe sensible de la rotation de la terre.

En dehors de cette position d'équilibre, le pendule exécutera des oscillations dont la loi se ramène encore à celle du mouvement d'un point pesant, sur un cercle qui tourne uniformément autour d'une *sécante* verticale. Nos formules donnent tous les éléments de ce pendule de comparaison en fonction des données du pendule gyroscopique.

L'inertie d'un tel système par rapport à l'axe *ab* serait trop grande pour que, même avec des vitesses énormes du tore, l'écart du pendule par rapport à la verticale fût appréciable sur la terre. Mais des tâtonnements successifs nous ont conduit à un appareil assez simple, dont la réalisation fournit des signes manifestes de la rotation terrestre, et dont la théorie est d'ailleurs fort intéressante au point de vue mécanique.

Concevons, sur la planète en rotation uniforme, un tore D monté dans une chape mobile autour d'un axe horizontal *ab* passant par le centre de gravité du tore et perpendiculaire à son axe. La chape porte, sur le prolongement inférieur de l'axe du tore, une aiguille sur laquelle glisse à frottement dur un petit poids curseur qui, *lorsque le tore est au repos*, assure à l'aiguille et à l'axe du tore une position verticale d'équilibre stable. Le tore ayant reçu une rotation rapide, il résulte des formules que nous obtenons très simplement par la méthode indiquée plus haut : 1° que, pour que la chape soit en équilibre stable, l'aiguille doit faire avec la verticale un angle d'autant plus grand que son plan d'oscillation est plus rapproché du plan du méridien, et que la vitesse rotatoire du tore est plus considérable; 2° que cette déviation a lieu vers le nord ou vers le sud, suivant que le tore tourne de gauche à droite ou de droite à gauche, vu de dessus, la déviation étant plus grande dans le premier cas, toutes choses égales d'ailleurs; 3° que la déviation cesse et que l'aiguille reprend la position verticale, lorsque le plan d'oscillation est normal au méridien; 4° que le système, écarté de sa position d'équilibre stable, exécute des oscillations dont la loi est encore donnée par le problème VI.

Les formules obtenues fournissent d'ailleurs les indications les plus précises pour déterminer les formes et les dimensions les plus convenables de l'appareil, assurer au phénomène tout son développement et manifester la rotation de la terre. Nous avons donné à cet instrument le nom de *barogyroscope*.

On peut aussi associer deux tores à axes parallèles dans une même chape. Cette disposition, qui donne lieu à des calculs analogues aux précédents, a l'avantage de fournir une déviation

plus grande avec une vitesse moindre des tores, et en outre, de se prêter à une expérience de contrôle indiquée par la théorie elle-même : si les vitesses de rotation initiales des tores sont égales et de sens contraire, l'aiguille reste verticale dans tous les azimuts.

On trouve dans les OEuvres de Foucault l'indication d'une expérience sur l'influence que la rotation de la terre exercerait sur la position d'équilibre apparent de l'axe d'une toupie ordinaire, la pointe étant fixe. L'application de la méthode à cette question nous a conduit à divers résultats intéressants, bien que les équations ne paraissent pas intégrables en général. On obtient, entre autres, ce résultat signalé par Foucault, que l'axe en équilibre fait un petit angle avec la verticale dans le plan méridien, vers le nord ou vers le sud suivant le sens de la rotation. Si l'axe n'était pas libre, mais guidé dans un plan fixe, on retrouverait encore le pendule à plan tournant comme type du mouvement oscillatoire de l'axe du tore.

SUR L'APPLICATION

DE

LA MÉTHODE DE LAGRANGE

AUX MOUVEMENTS RELATIFS

PREMIÈRE PARTIE

§ I.

1. Un corps ou *système de corps* S est rapporté à un système de comparaison mobile OXYZ. Le mouvement de ce système OXYZ se compose d'une translation égale à celle de l'origine O et d'une rotation autour d'un axe instantané OS passant par ce point. Si J désigne l'accélération absolue de l'origine O, nous ne changerons rien au mouvement *relatif* du corps S en attribuant à l'ensemble de ce corps et du système OXYZ, à chaque instant, une accélération égale et opposée à J, ce qui revient, d'après le principe de l'indépendance des mouvements, à appliquer à chaque point une force accélératrice égale et opposée à J. Si donc X, Y, Z sont les composantes parallèles à OX, OY, OZ de la force motrice qui agit sur le point m dont les coordonnées relatives sont x, y, z; J_x, J_y, J_z celles de l'accélération J, en remplaçant X, Y, Z par $X - mJ_x$, $Y - mJ_y$, $Z - mJ_z$, nous pourrons supposer l'origine O fixe et le système OXYZ animé seulement de la rotation OS. Si les forces motrices admettent un potentiel U, et si nous désignons par N l'expression

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad N = -\Sigma m(xJ_x + yJ_y + zJ_z),$$

où Σ indique une somme qui s'étend à tous les points du système S, nous aurons

$$\begin{aligned}&\Sigma\left[(X - mJ_x)\,dx + (Y - mJ_y)\,dy + (Z - mJ_z)\,dz\right]\\ &= \Sigma\,(X dx + Y dy + Z dz) - \Sigma m\,(J_x dx + J_y dy + J_z dz)\\ &= dU + dN = d\,(U + N).\end{aligned}$$

Le potentiel des forces qui produisent le mouvement *absolu* du système S, dans les conditions nouvelles où nous sommes placés (en faisant abstraction du mouvement de translation du système de comparaison), sera donc $U + N$.

D'autre part, les équations dynamiques de Lagrange (*) sont évidemment applicables à ce mouvement absolu, en sorte que si l'on désigne par q l'une quelconque des variables *réduites au plus petit nombre possible* qui définissent la position du corps S par rapport au système OXYZ; par T_2 la demi-force vive absolue de ce corps, on peut écrire immédiatement

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = \frac{\partial\,(U+N)}{\partial q}\ (**).$$

On a ainsi l'équation (IV) du mémoire de Bour. Prenant successivement pour q chacune des variables qui définissent la position du système S, on tirera de (2) toutes les équations différentielles du mouvement relatif de ce système. Mais il faut chercher une interprétation plus commode des quantités N et T_2.

2. On a d'abord, M désignant la masse totale du corps et x_1, y_1, z_1 les coordonnées de son centre de gravité G par rapport à OXYZ,

$$-N = J_x \Sigma m x + J_y \Sigma m y + J_z \Sigma m z = M(x_1 J_x + y_1 J_y + z_1 J_z).$$

(*) *Mécanique analytique*, t. I, p. 290 (éd. Bertrand).

(**) L'accent affectant une variable désignera toujours sa dérivée totale par rapport au temps.

Appelons ρ le rayon vecteur mené du point O au centre de gravité G, et désignons par la notation $a * b$ le produit géométrique $ab \cos \overline{ab}$ de deux segments a et b de grandeurs et de directions déterminées ; nous aurons

$$(3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad N = -MJ * \rho.$$

Il suit de là que N sera toujours nul 1° si l'origine O est fixe ou n'a qu'un mouvement rectiligne et uniforme, puisque J sera nul ; 2° si l'on choisit pour l'origine O le centre de gravité du corps ($\rho = 0$) ; 3° si l'accélération J du point O a une direction constamment normale à la droite qui joint ce point au centre de gravité du corps.

Pour évaluer T_2, appelons ω la vitesse angulaire du système OXYZ autour de son axe instantané de rotation OS (*) ; p, q, r les composantes de OS suivant OX, OY, OZ et v_x, v_y, v_z celles de la vitesse *relative* d'un point quelconque m. On sait que les composantes de la vitesse totale du point m (abstraction faite, toujours, de la translation commune) sont

$$v_x + qz - ry, \quad v_y + rx - pz, \quad v_z + py - qx,$$

d'où l'on tire

$$T_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma m \left[(v_x + qz - ry)^2 + (v_y + rx - pz)^2 + (v_z + py - qx)^2\right],$$

ou

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad T_2 = T + G + V,$$

en posant

$$T = \tfrac{1}{2} \Sigma m (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2),$$

$$G = \tfrac{1}{2} \Sigma m \left[(qz - ry)^2 + (rx - pz)^2 + (py - qx)^2\right],$$

$$V = \Sigma m \left[v_x(qz - ry) + v_y(rx - pz) + v_z(py - qx)\right].$$

(*) La droite OS est proportionnelle à ω et la rotation a lieu de gauche à droite pour l'observateur ayant les pieds en O et la tête en S.

T est visiblement *la demi-force vive du corps* S *dans son mouvement relatif par rapport au système* OXYZ; elle s'exprimera immédiatement en fonction des variables q et de leurs dérivées q'.

G représente la demi-force vive de S, due à la rotation d'entrainement autour de l'axe instantané OS. D'après un théorème bien connu, elle a pour expression le demi-produit du moment d'inertie H du corps S, à l'instant considéré, par rapport à l'axe instantané OS, par le carré de la vitesse angulaire ω, soit

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad G = \tfrac{1}{2} H\omega^2.$$

Enfin, écrivons l'expression de V sous la forme

$$V = p\Sigma m(yv_x - zv_y) + q\Sigma m(zv_z - xv_x) + r\Sigma m(xv_y - yv_x);$$

les facteurs qui multiplient p, q, r sont les sommes des moments des quantités de mouvement relatives du corps S par rapport aux axes mobiles; donc, si OQ représente l'axe du couple résultant de ces quantités de mouvement pour le point O, ou l'*axe d'impulsion relatif* du système S, nous aurons

$$V = pQ_x + qQ_y + rQ_z,$$

ou

$$(6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad V = \omega * Q.$$

V *est donc le produit géométrique de l'axe instantané de rotation* OS *du système de comparaison par l'axe d'impulsion relatif du corps* S.

Le grand avantage de ces interprétations géométriques données aux quantités N, T, G, V, qui figurent dans l'équation (2), consiste en ce que, dans chaque problème particulier, elles fourniront directement les expressions de ces quantités en fonction des variables les plus commodes pour le problème proposé, sans qu'il soit besoin de passer par ces longues et fastidieuses

transformations de coordonnées qui alourdissent la marche du calcul.

Nous appliquerons d'abord cette méthode à un problème très simple, mais dont la solution nous servira comme de type pour y ramener celle d'autres problèmes infiniment plus compliqués.

§ II.

3. Problème I. — *Un anneau* D *est mobile autour d'un axe horizontal* XX′ *passant par son centre de gravité* O ; *l'axe* XX′ *tourne lui-même, avec une vitesse angulaire constante* ω, *autour d'un axe vertical* ZOZ′. *En un point* M *de la droite* AOA′ *perpendiculaire à* XOX′ *est fixée une masse additionnelle* m. *Déterminer* 1° *l'inclinaison de l'anneau pour laquelle l'équilibre relatif aurait lieu* ; 2° *son mouvement dans des conditions initiales données. On suppose que* XX′, AA′ *et* OC *sont les axes principaux d'inertie de l'anneau relatifs à son centre de gravité et que* A, B, C *désignent les moments correspondants* (fig. 1) (*).

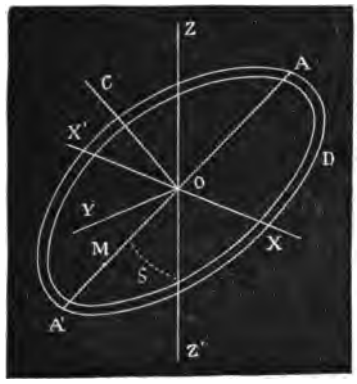


Fig. 1.

Prenons pour système de comparaison le système rectangulaire OXYZ tournant autour de OZ avec la vitesse ω. Appelons δ la distance OM, ζ l'angle Z′OA′, compté positivement de OZ′ vers OY, négativement en sens contraire ; cet angle ζ suffisant pour

(*) Ce problème est une généralisation de celui qui a été posé au concours d'agrégation, en 1873, et dont nous avons donné deux autres solutions (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 2e série, t. XVI, 1875, p. 152. M. Hioux a traité aussi cette question.

définir la position relative de l'anneau, sera la variable q de l'équation (1). Le mouvement apparent est une rotation, avec la vitesse angulaire ζ', autour de l'axe OX. Nous avons donc immédiatement, pour l'anneau,

$$T = \tfrac{1}{2}A\zeta'^2, \quad G = \frac{\omega^2}{2}(B\cos^2\zeta + C\sin^2\zeta), \quad V = \omega A\zeta' \cos \overline{XZ} = 0,$$

et pour la masse additionnelle,

$$T = \tfrac{1}{2}m\delta^2\zeta'^2, \quad G = \frac{\omega^2}{2}m\delta^2\sin^2\zeta, \quad V = 0;$$

donc, pour le système entier,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(A + m\delta^2)\zeta'^2 + \tfrac{1}{2}\omega^2(C + m\delta^2 - B)\sin^2\zeta + \tfrac{1}{2}\omega^2 B.$$

L'origine O étant fixe, N est nul; de plus, le centre de gravité de l'anneau étant fixe, la force motrice se réduit au poids mg de la masse additionnelle; on a donc

$$U = mg\delta\cos\zeta.$$

L'équation (2) devient, dans le problème actuel,

$$(A + m\delta^2)\frac{d\zeta'}{dt} - \omega^2(C - B + m\delta^2)\sin\zeta\cos\zeta = -mg\delta\sin\zeta,$$

ou, après division par $A + m\delta^2$,

$$(7) \quad \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{\omega^2(C - B + m\delta^2)}{A + m\delta^2}\sin\zeta\cos\zeta - \frac{mg\delta}{A + m\delta^2}\sin\zeta.$$

Cette équation différentielle du second ordre détermine ζ en fonction du temps, mais il suffit de considérer un cas particulier du problème. Supposons la masse de l'anneau négligeable : la

question devient celle du *mouvement d'un point pesant* M *sur un cercle qui tourne autour de son diamètre vertical avec une vitesse angulaire constante,* ou du *mouvement d'un pendule simple dont le plan d'oscillation* A'OZ' *tourne uniformément autour de la verticale de son point de suspension* O. Remplaçons, dans cette hypothèse, ω par ω' et δ par r; l'équation (7) se réduira à

$$(8) \quad \ldots \quad \frac{d\zeta'}{dt} = \omega'^2 \sin\zeta \cos\zeta - \frac{g}{r}\sin\zeta.$$

Or, on voit tout de suite que l'égalité (7) rentre dans (8), si l'on pose

$$\frac{\omega^2(C - B + m\delta^2)}{A + m\delta^2} = \omega'^2, \qquad \frac{m\delta}{A + m\delta^2} = \frac{1}{r},$$

d'où l'on tire

$$(9) \quad \ldots \quad \omega' = \omega\sqrt{\frac{C - B + m\delta^2}{A + m\delta^2}}, \qquad r = \delta + \frac{A}{m\delta},$$

valeurs toujours admissibles si $C + m\delta^2 \gtrless B$. De là ce théorème: *Les oscillations du plan de l'anneau qui passe par* XX' *et par le point* M *suivent exactement la même loi que celles d'un pendule simple, dont le plan d'oscillation tournerait autour de la verticale de suspension avec une vitesse constante, la longueur* r *du pendule et la vitesse* ω' *du plan tournant étant données par les relations* (9).

Il suffit donc de développer la solution du problème du pendule simple à plan tournant, ou d'intégrer l'équation (8). Mais avant cela, il est utile d'observer que si la direction de la gravité venait à être renversée (OZ au lieu de OZ'), l'équation (8) ne subirait évidemment d'autre modification que le changement de signe de son dernier terme, ce qui revient à remplacer r par $-r$ dans l'équation. Donc, dans la suite, nous serons autorisés à interpréter les valeurs négatives de r comme correspondant à un renversement dans la direction de la pesanteur.

4. Nous tirons de l'équation (8) la condition d'équilibre *relatif* du point pesant M. Pour que ζ reste constant, il faut et il suffit, ζ' étant supposé nul pour $t = 0$, que $\frac{d\zeta'}{dt}$ le soit aussi, ou que l'on ait à cet instant

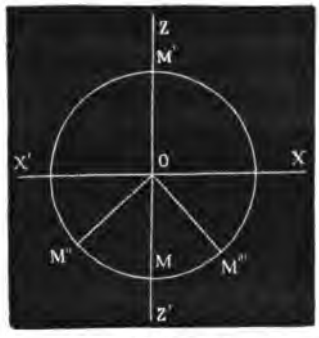


Fig. 2.

$$\omega' \sin\zeta \cos\zeta - \frac{g}{r}\sin\zeta = 0.$$

Si donc E désigne l'angle que fait le pendule OM en équilibre avec la verticale OZ', nous aurons

$$\sin E\left(\cos E - \frac{g}{r\omega'^2}\right) = 0,$$

équation à laquelle on satisfait de deux manières (fig. 2) : 1° ou bien en posant $\sin E = 0$, d'où $E = 0$ ou π, le pendule reste alors dans la verticale; 2° ou bien, en posant

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \cos E = \frac{g}{r\omega'^2},$$

équation qui détermine deux positions d'équilibre, symétriques par rapport à la verticale OZ', si la condition

$$\frac{g}{r\omega'^2} < 1, \text{ ou } \omega' > \sqrt{\frac{g}{r}}$$

est vérifiée; dans le cas contraire, l'équation (10) est impossible. Ces résultats s'accordent avec la théorie connue du régulateur de Watt.

L'équation (8) fournit encore le moyen de discerner les positions d'équilibre stable des autres, mais cette distinction résultera naturellement de la discussion des formules du mouvement du pendule, dont nous allons nous occuper.

5. L'équation (8), multipliée par $2d\zeta$ et intégrée, donne, la valeur initiale de ζ' étant supposée nulle et celle de ζ désignée par ζ_0,

$$\zeta'^2 = -\omega'^2(\cos^2\zeta - \cos^2\zeta_0) + \frac{2g}{r}(\cos\zeta - \cos\zeta_0),$$

ou

$$(11) \quad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = \omega'^2(\cos\zeta - \cos\zeta_0)\left(\frac{2g}{r\omega'^2} - \cos\zeta_0 - \cos\zeta\right).$$

Posons, pour abréger,

$$f = \frac{2g}{r\omega'^2} - \cos\zeta_0,$$

il viendra

$$(11') \quad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = \omega'^2(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(f - \cos\zeta).$$

Il faut évidemment que $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ et $f - \cos\zeta$ soient toujours de même signe, et comme le second facteur est d'abord égal à $f - \cos\zeta_0$, il suit de là que $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ aura le signe de cette quantité au début du mouvement. De là, trois cas à discuter :

$$f - \cos\zeta_0 > 0, \quad f - \cos\zeta_0 = 0, \quad f - \cos\zeta_0 < 0,$$

ou, eu égard à la valeur de f,

I) $\cos\zeta_0 < \frac{g}{r\omega'^2}$, II) $\cos\zeta_0 = \frac{g}{r\omega'^2}$, III) $\cos\zeta_0 > \frac{g}{r\omega'^2}$.

Lorsque l'on a

$$\omega' \gtrless \sqrt{\frac{g}{r}},$$

la première condition est toujours vérifiée. Au contraire, si l'on a

$$\omega' > \sqrt{\frac{g}{r}},$$

les conditions I), II) et III) reviennent, eu égard à l'équation (10), à

$$\cos\zeta_0 < \cos E, \quad \cos\zeta_0 = \cos E, \quad \cos\zeta_0 > \cos E.$$

I^er^ *cas.* $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ étant ici d'abord positif, le pendule se rapproche de la *nadirale* OZ', $d\zeta : dt$ est négatif, donc

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\omega'\sqrt{(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(f - \cos\zeta)}.$$

Le signe de ζ' ne peut changer que si ζ' s'annule, ou si le facteur $f - \cos\zeta$ s'évanouit, ce qui implique une nouvelle condition, $f \leqq 1$. De là, trois sous-hypothèses à examiner,

$$I, a) \quad f < 1, \qquad I, b) \quad f = 1, \qquad I, c) \quad f > 1,$$

ou bien

$$\omega' \cos\frac{\zeta_0}{2} > \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad \omega' \cos\frac{\zeta_0}{2} = \sqrt{\frac{g}{r}}, \quad \omega' \cos\frac{\zeta_0}{2} < \sqrt{\frac{g}{r}}.$$

Discutons-les successivement.

I, *a*). On a ici

$$\cos\zeta_0 < \frac{g}{r\omega'^2} < \cos^2\frac{\zeta_0}{2};$$

comme f est < 1, nous poserons

$$\cos\zeta_1 = f = \frac{2g}{r\omega'^2} - \cos\zeta_0 > \cos\zeta_0,$$

et la valeur de ζ' deviendra

$$(12) \qquad \frac{d\zeta}{dt} = -\omega'\sqrt{(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(\cos\zeta_1 - \cos\zeta)}$$

Une discussion facile montre que l'angle ζ variera depuis sa valeur initiale ζ_0, qui est en même temps une limite supérieure, jusqu'à ζ_1, limite inférieure ; puis, depuis ζ_1 jusqu'à ζ_0, et ainsi de suite indéfiniment, ζ restant toujours compris entre ζ_0 et ζ_1. Le pendule oscillera donc, en restant toujours du même côté de la verticale, de part et d'autre de la position d'équilibre

définie par l'équation (10), car on a, d'après l'expression de $\cos \zeta_1$,

$$\cos E = \frac{\cos \zeta_0 + \cos \zeta_1}{2}.$$

Le cosinus de l'écart qui répond à la position d'équilibre est donc la moyenne des cosinus des écarts qui répondent aux positions extrêmes, de sorte que l'amplitude de l'oscillation n'est pas la même de part et d'autre de cette position d'équilibre.

I, *b*). $f = 1$. On a, dans ce cas,

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\omega' \sqrt{(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(1 - \cos\zeta)} = -\omega' \sin\frac{\zeta}{2} \sqrt{2(\cos\zeta - \cos\zeta_0)};$$

une intégration facile donne t en fonction de $\frac{\zeta}{2}$ et montre que t devient infini pour $\zeta = 0$. Le point mobile se rapproche indéfiniment de la verticale OZ′ sans jamais l'atteindre.

I, *c*). Supposons maintenant $f > 1$. Comme $f - \cos\zeta$ ne peut plus devenir nul, il s'ensuit que ζ' ne peut s'annuler et par conséquent ne peut changer de signe, que si l'on a $\cos\zeta = \cos\zeta_0$. Donc $\frac{d\zeta}{dt}$ reste négatif, le pendule atteint la verticale OZ′, la dépasse, et continue à se mouvoir dans le même sens jusqu'à ce que l'on ait $\zeta = -\zeta_0$. Cette valeur atteinte, ζ' s'annule, et comme ζ ne peut continuer à décroître, sans quoi le radical deviendrait imaginaire, il faut que ζ' devienne positif. On a donc, à partir de cet instant,

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega' \sqrt{(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(f - \cos\zeta)},$$

ζ varie de $-\zeta_0$ à $+\zeta_0$, où ζ' s'annule de nouveau et change de signe et ainsi de suite. Le pendule oscille donc ici de part et d'autre de la position d'équilibre OZ′, par des oscillations d'égale amplitude.

Le cas que nous venons de discuter se présente nécessairement toutes les fois que l'on a

$$\frac{g}{r'\omega^2} \gtrless 1.$$

6. II^me *cas*. L'hypothèse

$$\cos\zeta_0 = \frac{g}{r\omega'^2}$$

transforme l'équation (11') en celle-ci :

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = -\omega'^2(\cos\zeta - \cos\zeta_0)^2,$$

qui ne peut être satisfaite, évidemment, que si l'on pose

$$\cos\zeta = \cos\zeta_0, \quad \frac{d\zeta}{dt} = 0,$$

en sorte que le point M reste en repos relatif dans sa position initiale. La valeur de $\cos\zeta_0$ montre, en effet, que nous sommes ici dans une des conditions d'équilibre définies par l'équation (10).

III^me *cas*. Nous supposons enfin que l'on ait

$$f - \cos\zeta_0 < 0 \quad \text{ou} \quad \cos\zeta_0 > \frac{g}{r\omega'^2}.$$

L'angle ζ_0 est donc ici moindre que $\frac{\pi}{2}$; il est compris entre zéro et l'angle E de l'équation (10). D'après la relation (11'), $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ sera d'abord négatif, ζ commencera donc par croître, ζ' sera positif; on aura

$$(13) \quad \ldots \quad \frac{d\zeta}{dt} = \omega'\sqrt{(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(f - \cos\zeta)}.$$

Le signe du radical restera le même jusqu'à ce que ζ' s'annule ou que l'on ait

$$f - \cos\zeta = 0, \quad \cos\zeta = \frac{2g}{r\omega'^2} - \cos\zeta_0 = \cos\zeta_1,$$

ζ_1 désignant l'angle dont le cosinus est f, quantité qui est évidemment toujours supérieure à -1. Lorsque ζ aura atteint la valeur ζ_1, comme il ne peut continuer à croître, sans quoi le radical deviendrait imaginaire, il faudra que ζ' devienne négatif, le pendule se rapprochera de nouveau de la verticale jusqu'à ce que ζ soit égal à ζ_0, puis s'en éloignera, et ainsi de suite.

L'angle ζ oscille donc entre sa valeur initiale ζ_0, limite inférieure, et ζ_1, limite supérieure, et cela périodiquement et indéfiniment en passant chaque fois par la position d'équilibre (10). On a encore la relation

$$\cos E = \frac{\cos \zeta_0 + \cos \zeta_1}{2}.$$

7. Il résulte encore de la discussion précédente que, lorsque les positions d'équilibre de l'équation (10) existent, c'est-à-dire lorsque ω' est plus grand que $\sqrt{\frac{g}{r}}$, elles sont des positions d'équilibre stable [*cas* I, *a*) et III]. Au contraire, si l'on a

$$\omega' < \sqrt{\frac{g}{r}},$$

il n'y a que deux positions d'équilibre, l'une stable OZ', l'autre instable OZ (*cas* I, *c*).

Il n'est pas nécessaire de discuter l'équation (8) dans l'hypothèse, indiquée plus haut, de $r < 0$. Il suffit, en effet, de remplacer dans l'équation ζ par $\pi - \zeta$, c'est-à-dire de compter l'angle ζ à partir de la zénithale OZ, pour ramener de nouveau l'équation (8) à la même forme que si r était positif. On retrouverait donc les mêmes cas que ci-dessus.

L'équation (8) marque aussi les positions du pendule pour lesquelles la vitesse atteint son maximun, car on doit avoir alors

$$\frac{d\zeta'}{dt} = 0,$$

d'où, en vertu de l'équation (8),

$$\sin\zeta\left(\cos\zeta-\frac{g}{r\omega'^2}\right)=0.$$

Ces positions coïncident donc avec celles dans lesquelles le pendule resterait en repos apparent s'il n'avait aucune vitesse initiale.

§ III.

DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE DE LA SOLUTION DU PROBLÈME.

8. *Cas* 1, *a*). Nous reprenons l'équation (12) sous la forme

$$\omega' dt=-\frac{d\zeta}{\sqrt{(\cos\zeta-\cos\zeta_0)(\cos\zeta_1-\cos\zeta)}},$$

ou, en posant

$$x=\cos\zeta,\quad \text{d'où}\quad d\zeta=-\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\omega' dt=\frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x-\cos\zeta_0)(x-\cos\zeta_1)}}.$$

Les racines du polynôme sous le radical sont, rangées par ordre de grandeur croissante,

$$-1<\cos\zeta_0<\cos\zeta_1<1.$$

Pour réduire la différentielle elliptique à la forme canonique, appliquons la méthode de Richelot (*), c'est-à-dire que nous pose-

(*) M. le comte de Sparre a exposé depuis la publication de ce mémoire, dans les *Annales de la Société scientifique*, t. VIII, 1884, une méthode beaucoup plus simple pour faire cette réduction. Nous y renvoyons le lecteur.

rons, k étant le module, z une variable comprise entre -1 et $+1$ et variant dans le même sens que t et que x,

$$\frac{1-k}{1+k}=\sqrt{\frac{(1+\cos\zeta_0)(1-\cos\zeta_1)}{(1-\cos\zeta_0)(1+\cos\zeta_1)}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta_1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta_0},$$

$$\frac{\cos\zeta_1-x}{x-\cos\zeta_0}=\sqrt{\frac{(1-\cos\zeta_1)(1+\cos\zeta_1)}{(1-\cos\zeta_0)(1+\cos\zeta_0)}\frac{1-z}{1+z}}=\frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta_0}\frac{1-z}{1+z}.$$

De là on tire, par des transformations faciles,

$$k=\frac{\sin\frac{1}{2}(\zeta_0-\zeta_1)}{\sin\frac{1}{2}(\zeta_0+\zeta_1)},$$

$$x=\frac{\sin(\zeta_0+\zeta_1)+z\sin(\zeta_0-\zeta_1)}{(\sin\zeta_0+\sin\zeta_1)+z(\sin\zeta_0-\sin\zeta_1)},$$

ou, en posant pour abréger

$$\frac{\zeta_0+\zeta_1}{2}=\alpha,\quad \frac{\zeta_0-\zeta_1}{2}=\beta,$$

$$(14)\quad \ldots\ldots\ldots\ldots k=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$(15)\quad \ldots\ldots x=\frac{\sin\alpha\cos\alpha+z\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta+z\sin\beta\cos\alpha}.$$

On sait que, par cette transformation, la valeur de $\omega' dt$ prend la forme

$$\omega' dt=\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{2(\cos\zeta_1-\cos\zeta_0)}}\cdot\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

ou, après réduction au moyen de l'équation (14),

$$\omega'\sin\alpha\,.\,dt=\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Posons, pour abréger l'écriture,

$$\rho = \omega' \sin \alpha,$$

et intégrons l'équation en observant que, d'après la relation établie entre x et z, $t = 0$ donne $x = \cos \zeta_0$ et $z = -1$. Il vient

$$\rho t = \int_{-1}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K + \int_{0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

K représentant ici, suivant la notation de Jacobi, l'intégrale

$$\int_{0}^{1} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Nous avons donc, enfin,

$$(16) \quad \ldots z = \operatorname{sn}(\rho t - K) = -\operatorname{sn}(\rho t + K),$$

et, si nous substituons la valeur de z dans l'équation (15) en remplaçant x par $\cos \zeta$,

$$(17) \quad \ldots \cos \zeta = \frac{\sin \alpha \cos \alpha - \sin \beta \cos \beta \operatorname{sn}(\rho t + K)}{\sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \operatorname{sn}(\rho t + K)}.$$

Cette formule montre 1° que pour $t = 0$, qui donne

$$\operatorname{sn}(\rho t + K) = \operatorname{sn} K = 1,$$

$\cos \zeta$ se réduit à $\cos \zeta_0$, comme cela devait être, tandis que, pour $\rho t = 2K$, ou $t = \frac{2K}{\rho}$, on a

$$\operatorname{sn}(\rho t + K) = \operatorname{sn}(3K) = -1, \qquad \cos \zeta = \cos \zeta_1;$$

2° que $\cos \zeta$ est une fonction périodique du temps t, la durée de la période, ou *la durée τ de l'oscillation complète du pendule dans son plan tournant*, étant donnée par l'équation

$$\rho \tau = 4K \quad \text{ou} \quad \tau = \frac{4K}{\rho},$$

ou encore

$$(18) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tau = \frac{4K}{\omega' \sin \alpha}.$$

9. L'équation (17) se met sous différentes formes. On a d'abord, à cause de l'équation (14),

$$(19) \quad \ldots\ldots \cos\zeta = \frac{\cos\alpha - k\cos\beta\,\mathrm{sn}(\rho t + K)}{\cos\beta - k\cos\alpha\,\mathrm{sn}(\rho t + K)}.$$

On a aussi, par l'équation (15),

$$1 - x = \frac{(\cos\beta - \cos\alpha)(\sin\alpha - z\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta + z\sin\beta\cos\alpha},$$

$$1 + x = \frac{(\cos\beta + \cos\alpha)(\sin\alpha + z\sin\beta)}{\sin\alpha\cos\beta + z\sin\beta\cos\alpha}$$

donc

$$\frac{1 - \cos\zeta}{1 + \cos\zeta} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{\cos\beta + \cos\alpha}\,\frac{1 - kz}{1 + kz},$$

ou, en transformant et mettant pour z sa valeur (16),

$$(20) \quad \ldots \quad \mathrm{tg}^2\frac{\zeta}{2} = \mathrm{tg}\frac{\zeta_0}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\zeta_1}{2}\cdot\frac{1 + k\,\mathrm{sn}(\rho t + K)}{1 - k\,\mathrm{sn}(\rho t + K)}.$$

Cette relation, commode pour le calcul numérique de ζ, fait voir en outre qu'à l'instant où l'on a

$$\rho t = K, \quad \text{ou} \quad t = \frac{K}{\rho},$$

l'angle ζ vérifie l'équation

$$\mathrm{tg}\frac{\zeta}{2} = \sqrt{\mathrm{tg}\frac{\zeta_0}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\zeta_1}{2}},$$

c'est-à-dire que *la tangente de l'angle* $\frac{1}{2}\zeta$ *est une moyenne géométrique entre les tangentes des angles* $\frac{1}{2}\zeta_0$ *et* $\frac{1}{2}\zeta_1$.

On tire aussi de l'équation (15)

$$\cos\zeta - \cos\zeta_0 = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + z\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta + z\sin\beta\cos\alpha} - \cos(\alpha+\beta),$$

ou, après réduction et substitution de la valeur de z en fonction du temps,

$$(21) \qquad \cos\zeta - \cos\zeta_0 = \sin\zeta_0 \frac{1 - \operatorname{sn}(\rho t + K)}{\cot\beta - \cot\alpha\operatorname{sn}(\rho t + K)}.$$

10. On peut aussi introduire les fonctions de Jacobi. D'après la relation

$$\operatorname{sn}(\rho t + K) = \frac{\operatorname{cn}(\rho t)}{\operatorname{dn}(\rho t)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\theta_2(\rho t)}{\theta_3(\rho t)}\ (*),$$

il viendra

$$(22) \quad . \quad . \quad . \quad \cos\zeta = \frac{\cos\alpha\,\theta_3(\rho t) - \sqrt{k}\cos\beta\,\theta_2(\rho t)}{\cos\beta\,\theta_3(\rho t) - \sqrt{k}\cos\alpha\,\theta_2(\rho t)}.$$

Nous ferons encore remarquer les relations suivantes :

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1 - \operatorname{sn}(\rho t - K)}{1 + \operatorname{sn}(\rho t - K)} = \frac{\operatorname{cn}^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\operatorname{dn}^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}{k'^2\operatorname{sn}^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)} = \frac{\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}{\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}.$$

De cette équation, combinée avec la relation ci-dessus

$$\frac{\cos\zeta_1 - \cos\zeta}{\cos\zeta - \cos\zeta_0} = \frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta_0}\frac{1-z}{1+z},$$

(*) Les fonctions θ, θ_1, θ_2, θ_3 sont respectivement les fonctions Θ, H, H_1, Θ_1, de Jacobi.

on déduira facilement

$$\cos\zeta = \frac{\sin\zeta_0\cos\zeta_1\,\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right) + \sin\zeta_1\cos\zeta_0\,\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}{\sin\zeta_0\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right) + \sin\zeta_1\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}. \tag{23}$$

Si l'on considère le cas de $f = 1$ comme un cas-limite relativement au précédent, on voit immédiatement que $f = 1$ donne $\zeta_1 = 0$, $k = 1$, et par suite

$$K = \int_0^1 \frac{dz}{1 - z^2}$$

devient infini, ce qui montre bien que la position OZ′ est une position asymptotique pour le pendule OM.

11. *Cas* I, *c*). C'est celui dans lequel on a

$$f = \frac{2g}{\omega'^2 r} - \cos\zeta_0 > 1,$$

et où, comme on l'a vu, l'angle ζ varie indéfiniment entre $+\zeta_0$ et $-\zeta_0$ en passant par zéro; $\cos\zeta$ est donc toujours compris entre $\cos\zeta_0$ et $+1$. L'équation (11′) donne, ζ' étant d'abord négatif,

$$\omega' dt = -\frac{d\zeta}{\sqrt{(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(f - \cos\zeta)}},$$

ou, en posant $x = \cos\zeta$,

$$\omega' dt = \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x-\cos\zeta_0)(x-f)}}.$$

Les racines du polynôme en x sont, rangées par ordre de grandeur,

$$-1 < \cos\zeta_0 < 1 < f,$$

et la transformation de Richelot donnera, z désignant une variable croissant d'abord avec t et toujours comprise entre -1 et $+1$,

$$\frac{1-k}{1+k}=\sqrt{\frac{(f-1)(1+\cos\zeta_0)}{2(f-\cos\zeta_0)}}=\cos\frac{\zeta_0}{2}\sqrt{\frac{f-1}{f-\cos\zeta_0}},$$

$$\frac{1-x}{x-\cos\zeta_0}=\frac{1}{\cos\frac{\zeta_0}{2}}\sqrt{\frac{f-1}{f-\cos\zeta_0}}\,\frac{1-z}{1+z},$$

$$\omega' dt=\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{(1-\cos\zeta_0)(1+f)}}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Pour simplifier, nous ferons

$$\frac{\zeta_0}{2}=\alpha,\quad \frac{f-1}{f-\cos\zeta_0}=\cos^2\beta,$$

ce qui est permis, puisque le premier membre de cette dernière égalité est compris entre zéro et l'unité. Il viendra ainsi

$$\frac{1-k}{1+k}=\cos\alpha\cos\beta,$$

$$\frac{1-x}{x-\cos\zeta_0}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,\frac{1-z}{1+z},$$

d'où enfin

$$(24)\quad \ldots\ldots\quad k=\frac{1-\cos\alpha\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta},$$

$$(25)\qquad x=\cos\zeta=\frac{(1+z)\cos\alpha+(1-z)\cos\beta\cos 2\alpha}{(1+z)\cos\alpha+(1-z)\cos\beta}.$$

On tire sans peine de cette dernière équation

$$(26)\qquad \begin{cases} \sin^2\dfrac{\zeta}{2}=\sin^2\alpha\cos\beta\,\dfrac{1-z}{(1+z)\cos\alpha+(1-z)\cos\beta}, \\ \cos\zeta-\cos\zeta_0=\sin\alpha\sin 2\alpha\,\dfrac{1+z}{(1+z)\cos\alpha+(1-z)\cos\beta}. \end{cases}$$

Posons, d'autre part,

$$\rho = \frac{\omega'}{2}\sqrt{\frac{(1-\cos\zeta_0)(1+f)}{k}},$$

ce qui, à cause des relations

$$1-\cos\zeta_0 = 2\sin^2\alpha,$$

$$\frac{1+f}{2} = \frac{1-\cos^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\beta},$$

peut s'écrire aussi

$$(27)\quad \ldots\ldots\quad \rho = \frac{\omega'\sin\alpha}{\sin\beta}(1+\cos\alpha\cos\beta).$$

L'équation différentielle du mouvement deviendra

$$\rho dt = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

et l'on aura, en intégrant et observant que $t = 0$ donne $\zeta = \zeta_0$ et $z = -1$,

$$(28)\quad \ldots\ldots\quad z = \operatorname{sn}(\rho t - K) = -\operatorname{sn}(\rho t + K).$$

Cette valeur de z, substituée dans les équations (25) et (26), les transformera comme il suit :

$$(29)\quad \begin{cases} \cos\zeta = \dfrac{\cos\alpha+\cos\beta\cos 2\alpha-(\cos\alpha-\cos\beta\cos 2\alpha)\operatorname{sn}(\rho t+K)}{(\cos\alpha+\cos\beta)-(\cos\alpha-\cos\beta)\operatorname{sn}(\rho t+K)}; \\ \sin^2\dfrac{\zeta}{2} = \sin^2\alpha\cos\beta\,\dfrac{1+\operatorname{sn}(\rho t+K)}{(\cos\alpha+\cos\beta)-(\cos\alpha-\cos\beta)\operatorname{sn}(\rho t+K)}; \\ \cos\zeta-\cos\zeta_0 = \sin\alpha\sin 2\alpha\,\dfrac{1-\operatorname{sn}(\rho t+K)}{(\cos\alpha+\cos\beta)-(\cos\alpha-\cos\beta)\operatorname{sn}(\rho t+K)}; \end{cases}$$

La deuxième des équations (29) est commode pour la discussion. Elle montre que, pour

$$t = 0, \quad t = \frac{2K}{\rho}, \quad t = \frac{4K}{\rho}, \ldots$$

on a successivement

$$\zeta = \zeta_0, \quad \zeta = 0, \quad \zeta = -\zeta_0, \ldots;$$

la durée d'une oscillation complète du pendule est donnée par la formule

$$(30) \quad \ldots \quad \tau = \frac{8K}{\rho} = \frac{8K \sin\beta}{\omega' \sin\alpha\,(1 + \cos\alpha\cos\beta)}.$$

12. La loi du mouvement peut être présentée sous une forme plus élégante, au moyen de la relation rappelée plus haut

$$\frac{1-z}{1+z} = \frac{1 - \operatorname{sn}(\rho t - K)}{1 + \operatorname{sn}(\rho t - K)} = \frac{\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}{\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}.$$

Les expressions (26) s'écrivent alors comme il suit :

$$(31) \quad \begin{cases} \sin^2\dfrac{\zeta}{2} = \sin^2\alpha\cos\beta\,\dfrac{\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}{\cos\alpha\,\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right) + \cos\beta\,\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}, \\ \cos\zeta - \cos\zeta_0 = \sin\alpha\sin 2\alpha\,\dfrac{\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}{\cos\alpha\,\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right) + \cos\beta\,\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}. \end{cases}$$

L'angle ζ est donc ainsi exprimé en fonction explicite du temps sous des formes variées.

18. III^me^ *cas*. Nous avons ici

$$f < \cos\zeta_0,$$

et l'angle ζ_0 est compris entre zéro et l'angle E défini par l'équation (10). Nous avons établi que, dans ce cas, ζ varie entre ζ_0 et une limite supérieure ζ_1 dont le cosinus est égal à f. L'équation (13) devient

$$\omega' dt = \frac{d\zeta}{\sqrt{(\cos\zeta - \cos\zeta_0)(\cos\zeta_1 - \cos\zeta)}} = -\frac{dx}{\sqrt{(x+1)(x-\cos\zeta_1)(x-\cos\zeta_0)(x-1)}},$$

x désignant toujours $\cos\zeta$. Un calcul tout semblable à celui du cas (I, α), et dans lequel on posera

$$\frac{\zeta_1 + \zeta_0}{2} = \alpha, \quad \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{2} = \beta,$$

donnera

$$\frac{1-k}{1+k} = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta_0}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\zeta_1}, \quad \text{d'où} \quad k = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

puis

$$\frac{x - \cos\zeta_1}{\cos\zeta_0 - x} = \frac{\sin\zeta_1}{\sin\zeta_0} \cdot \frac{1-z}{1+z},$$

d'où

$$x = \cos\zeta = \frac{\sin\alpha\cos\alpha - z\sin\beta\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta - z\sin\beta\cos\alpha}.$$

D'autre part, en posant

$$\rho = \omega' \sin\alpha,$$

on transformera l'égalité ci-dessus par la substitution de z à x, en celle-ci

$$\rho dt = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

et comme $t = 0$ donne $x = \cos\zeta_0$ et $z = -1$, on aura

$$z = \operatorname{sn}(\rho t - K) = -\operatorname{sn}(\rho t + K).$$

Portant cette valeur de z dans l'équation ci-dessus, on trouvera

$$(32) \quad \cos\zeta = \frac{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta\operatorname{sn}(\rho t + K)}{\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha\operatorname{sn}(\rho t + K)}.$$

On peut aussi, comme nous l'avons fait aux n^{os} 9 et 10, donner à cette équation les formes suivantes :

$$(33) \quad \operatorname{tg}^2\frac{\zeta}{2} = \operatorname{tg}\frac{\zeta_0}{2}\operatorname{tg}\frac{\zeta_1}{2}\frac{1-k\operatorname{sn}(\rho t + K)}{1+k\operatorname{sn}(\rho t + K)},$$

$$(34) \quad \cos\zeta - \cos\zeta_0 = -\sin\zeta_0\frac{1-\operatorname{sn}(\rho t + K)}{\cot\beta + \cot\alpha\operatorname{sn}(\rho t + K)},$$

$$(35) \quad \cos\zeta = \frac{\cos\alpha\,\theta_3(\rho t) + \sqrt{k}\cos\beta\,\theta_2(\rho t)}{\cos\beta\,\theta_3(\rho t) + \sqrt{k}\cos\alpha\,\theta_2(\rho t)},$$

$$(36) \quad \cos\zeta = \frac{\sin\zeta_0\cos\zeta_1\,\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right) + \sin\zeta_1\cos\zeta_0\,\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}{\sin\zeta_0\,\theta^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_1^2\left(\frac{\rho t}{2}\right) + \sin\zeta_1\,\theta_2^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)\theta_3^2\left(\frac{\rho t}{2}\right)}.$$

La durée d'une oscillation complète du pendule sera

$$\tau = \frac{4K}{\rho} = \frac{4K}{\omega'\sin\alpha}.$$

Il existe une analogie évidente entre les solutions dans le cas (I, a) et dans le cas III.

§ IV.

14. Problème II. — *On a un gyroscope* (fig. 3 et 4) *composé d'un disque ou tore* D, *d'un anneau intérieur* I, *d'un anneau extérieur* E. *L'anneau* E *est maintenu en mouvement de rotation uniforme autour de son diamètre* ZOZ', *avec une vitesse angulaire* ω. *L'anneau* I *peut pivoter librement autour de son diamètre* X_1OX_2, *perpendiculaire à* ZOZ'; *le disque* D *a reçu, à l'instant initial, une rotation autour de son axe de figure* Oζ *maintenu immobile, ainsi que l'anneau* I, *par rapport à l'anneau* E. *On demande de déterminer le mouvement relatif du système* (D, I) *par rapport à l'anneau extérieur.*

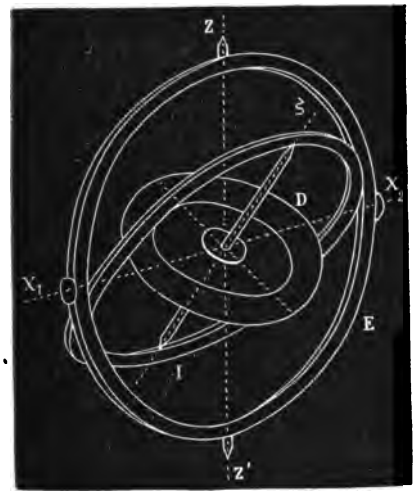


Fig. 3.

L'axe Oζ est porté par l'anneau I dont il forme un diamètre perpendiculaire à X_1OX_2; de même, l'anneau I repose sur des pivots supportés par l'anneau E, et le diamètre X_1OX_2 est la ligne passant par ces pivots. Les axes de rotation ZOZ', X_1OX_2 et Oζ se coupent en un même point fixe O, centre de gravité commun des trois corps, qui sont supposés de révolution, D autour de Oζ, I autour de OY_1 perpendiculaire à Oζ et

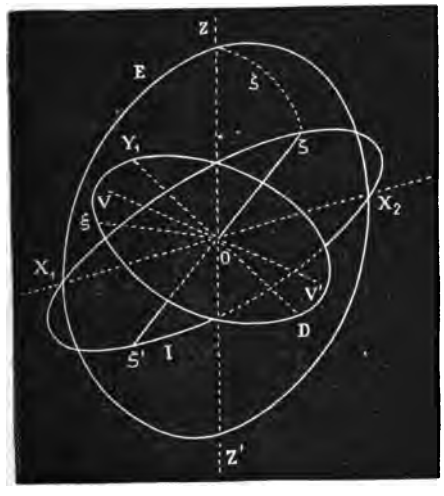


Fig. 4.

à OX_1, E autour de OV perpendiculaire à OX_1 et à OZ. Pour chacun des trois corps D, I, E, nous appelons *équateur* le plan mené par le point O normalement à l'axe de révolution ; *moment d'inertie axial* (C, ou C_1, ou C_2) le moment d'inertie relatif à l'axe de révolution ; *moment d'inertie équatorial* (A, ou A_1, ou A_2) celui qui se rapporte à un rayon quelconque de l'équateur. Le système de comparaison auquel se rapportent les mouvements relatifs est ici le système rectangulaire OX_1VZ tournant autour de ZOZ' ; le corps mobile S se compose du disque D et de l'anneau I.

Nous appelons ζ l'angle $ZO\zeta$ que fait l'axe de figure du tore avec la droite fixe OZ, compté positivement de gauche à droite par rapport à OX_1 ; φ l'angle que fait un rayon mobile $O\xi$ de l'équateur du tore avec la trace OX_1, angle compté positivement dans le sens $X_1 Y_1$ ou de gauche à droite par rapport à $O\zeta$; n la rotation initiale du tore, prise avec le signe + ou — suivant le sens de cette rotation par rapport à $O\zeta$.

Nous appliquons les équations (2), (3), (4), (5), (6). Les composantes de la rotation *apparente* du disque suivant OX_1, OY_1, $O\zeta$ sont respectivement égales à ζ', 0, φ' ; on a donc, d'après des théorèmes de mécanique bien connus, pour le tore

$$T = \frac{1}{2}(A\zeta'^2 + C\varphi'^2),$$

$$G = \frac{\omega^2}{2}(A \sin^2\zeta + C\cos^2\zeta),$$

$$V = \omega(A\zeta' \cos \overline{X_1 Z} + C\varphi' \cos \overline{\zeta Z}) = C\omega\varphi' \cos\zeta ;$$

et pour l'anneau intérieur, dont le mouvement relatif se réduit à une rotation ζ' autour de l'axe OX_1,

$$T = \frac{1}{2}A_1\zeta'^2, \qquad G = \frac{\omega^2}{2}(A_1\cos^2\zeta + C_1\sin^2\zeta), \qquad V = 0.$$

On a donc, pour l'ensemble des deux corps D, I, en vertu de l'égalité (4),

$$T_2 = \frac{1}{2}(A + A_1)\zeta'^2 + \frac{1}{2}C\varphi'^2 + C\omega\varphi' \cos\zeta + \frac{\omega^2}{2}\left[(A + C_1)\sin^2\zeta + (C + A_1)\cos^2\zeta\right],$$

ou, en posant pour abréger,

$$A + A_1 = a, \qquad A + C_1 - A_1 = b,$$

$$(37) \qquad T_2 = \frac{1}{2}a\zeta'^2 + \frac{1}{2}C(\varphi' + \omega\cos\zeta)^2 + \frac{\omega^2}{2}(A_1 + b\sin^2\zeta).$$

Le centre de gravité des corps D, I étant fixe, il n'y a pas de force motrice, U est donc nul, et, d'autre part, N est nul aussi (n° 2). L'équation (2) se réduit donc ici à

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = 0,$$

ou, en prenant successivement $q = \varphi, \zeta$ et remplaçant T_2 par sa valeur (37),

$$\frac{d}{dt}(\varphi' + \omega\cos\zeta) = 0,$$

$$a\frac{d\zeta'}{dt} + C(\varphi' + \omega\cos\zeta)\omega\sin\zeta - \omega^2 b\sin\zeta\cos\zeta = 0.$$

La première de ces équations s'intègre immédiatement et donne, l_1 désignant une constante,

$$\varphi' + \omega\cos\zeta = l_1$$

ou

$$\varphi' = l_1 - \omega\cos\zeta,$$

et la valeur de l_1, déterminée par les données initiales, sera

$$l_1 = n + \omega\cos\zeta_0,$$

puisque l'on a supposé $\zeta'_0 = 0$. φ est donc déterminé par l'équation

$$(38) \quad \ldots \quad \varphi' = n - \omega(\cos\zeta - \cos\zeta_0),$$

et l'élimination de $\varphi' + \omega\cos\zeta$ dans la seconde des équations du mouvement donnera

$$(39) \quad \ldots \quad a\frac{d\zeta'}{dt} = \omega^2 b \sin\zeta\cos\zeta - Cl_1\omega\sin\zeta.$$

Intégrons cette équation, déterminons la constante par la condition $\zeta'_0 = 0$, nous aurons

$$(40) \qquad a\frac{d\zeta^2}{dt^2} = 2Cl_1\omega(\cos\zeta - \cos\zeta_0) - \omega^2 b(\cos^2\zeta - \cos^2\zeta_0),$$

ce que nous écrirons aussi sous la forme

$$(41) \qquad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{\omega^2 b}{a}(\cos\zeta - \cos\zeta_0)\left(\frac{2Cl_1}{\omega b} - \cos\zeta_1 - \cos\zeta\right).$$

15. L'équation (39) fournit immédiatement les conditions pour que, ζ'_0 étant supposé nul, l'axe $O\zeta$ du tore garde une inclinaison constante ζ_0 sur la droite de OZ.

Il faut et il suffit, pour cela, que l'on ait

$$\left(\frac{d\zeta'}{dt}\right)_0 = 0,$$

d'où

$$\omega\sin\zeta_0(Cl_1 - \omega b\cos\zeta_0) = 0.$$

Cette équation ne peut être vérifiée que de deux manières :

1° Soit en posant $\sin\zeta_0 = 0$, c'est-à-dire $\zeta_0 = 0$ ou π, et alors l'axe du disque coïncide, dans sa position initiale, avec l'axe de rotation OZ ou avec son prolongement. Il est clair, en effet, que dans ces conditions l'axe $O\zeta$ ne prendrait aucun mouvement par rapport à l'anneau E;

2° Soit en posant

$$Cl_1 - \omega b \cos \zeta_0 = 0,$$

ou, d'après la valeur de l_1,

$$(42) \quad \ldots \ldots \quad n = \frac{b - C}{C} \omega \cos \zeta_0 = \nu.$$

Si donc ζ_0 est donné, il suffira d'imprimer au tore une vitesse initiale de rotation égale à ν, pour que son axe garde une inclinaison constante sur OZ.

Il suit d'ailleurs de l'équation (38) que si ζ est constant, φ' reste constant et égal à n; *la vitesse relative de rotation du disque restera donc invariable.*

Il suit encore de l'équation (42) que si le tore n'a reçu aucune rotation initiale ($n = 0$), il ne restera cependant pas en repos, *généralement*, par rapport à l'anneau E. Pour que l'équation (42) soit vérifiée par $\nu = 0$, il faut que cos ζ_0 soit nul, ce qui place l'axe Oζ du disque à angle droit sur l'axe OZ, à l'époque $t = 0$; ou bien, que l'on ait

$$b - C = 0,$$

c'est-à-dire

$$C - A = C_1 - A_1.$$

Cette condition peut évidemment être réalisée par une construction convenable du gyroscope (*), et, dans ce cas, l'équation (42) donnera $\nu = 0$, quel que soit ζ_0; de plus, φ' sera constamment nul. On peut donc énoncer cette propriété :

Quand l'excès du moment d'inertie axial sur le moment

(*) Si, par exemple, D était un disque cylindrique de rayon R et d'épaisseur h; I un anneau cylindrique d'épaisseur h_1, dont les rayons interne et externe seraient représentés par R_1 et R_2, cette condition reviendrait à celle-ci :

$$R^2 h \left(\frac{R^2}{4} - \frac{h^2}{3}\right) = h_1 (R_2^2 - R_1^2) \left(\frac{R_2^2 + R_1^2}{4} - \frac{h_1^2}{3}\right),$$

ou, approximativement,

$$R^4 = R_2^4 - R_1^4.$$

d'inertie équatorial a la même valeur dans le tore et dans l'anneau intérieur, si le tore est en repos relatif à l'instant initial, il y restera indéfiniment, quelle que soit l'inclinaison initiale de son axe de figure sur l'axe de rotation du système de comparaison.

16. Développons maintenant les conséquences de l'équation (41).

Pour identifier cette équation avec l'égalité (11), il suffit évidemment de poser

$$\omega'^2 = \frac{\omega^2 b}{a}, \qquad \frac{g}{r} = \frac{Cl_1\omega}{a},$$

d'où l'on tire

$$(43) \quad \ldots \quad \omega' = \omega\sqrt{\frac{b}{a}}, \qquad r = \frac{ga}{C\omega l_1},$$

ou, si l'on a égard aux valeurs des quantités a, b, l_1,

$$\omega' = \omega\sqrt{\frac{A + C_1 - A_1}{A + A_1}}, \qquad r = \frac{g(A + A_1)}{C\omega(n + \omega\cos\zeta_0)}.$$

Dans les gyroscopes tels qu'ils sont habituellement construits, $A + C_1 - A_1$ a une valeur nécessairement positive et ω' est réel. En vertu des formules (43), le problème actuel est donc ramené à celui du n° 5, et l'on peut énoncer ce théorème remarquable :

Lorsque l'anneau extérieur du gyroscope tourne uniformément autour d'un diamètre OZ, *et que le disque a reçu une rotation initiale autour de son axe de figure maintenu en repos par rapport à cet anneau, l'axe de figure du disque oscille, par rapport à l'axe* OZ, *comme le ferait par rapport à la verticale de son point de suspension un pendule simple, dont le plan d'oscillation tournerait uniformément autour de cette verticale, la vitesse angulaire* ω' *de la rotation du plan et la longueur* r *du pendule étant données par les égalités* (43).

Si la masse de l'anneau intérieur était négligeable, on aurait $\omega' = \omega$.

On voit qu'il reste simplement à appliquer ici les formules trouvées précédemment pour le mouvement du pendule, ce qui n'offre aucune difficulté. Nous pouvons d'ailleurs supposer ω positif; cela revient à prendre la direction OZ du côté pour lequel la rotation de l'anneau E serait vue se faisant de gauche à droite. Nous supposerons aussi $\zeta_0 < 90°$, puisque l'on choisit à volonté le *sens* dans lequel est dirigé l'axe de figure $O\zeta$.

17. Considérons d'abord la valeur de r, qui donne lieu à trois hypothèses distinctes :

$$\text{A)} \quad n + \omega \cos \zeta_0 > 0;$$
$$\text{B)} \quad n + \omega \cos \zeta_0 < 0;$$
$$\text{C)} \quad n + \omega \cos \zeta_0 = 0.$$

Dans l'hypothèse A), r est positif; la solution développée dans les §§ II et III s'applique sans modification. D'après ce que nous avons dit au n° 5, nous avons à considérer trois cas, suivant que

$$f - \cos \zeta_0 = 2 \left(\frac{C l_1}{\omega b} - \cos \zeta_0 \right)$$

est $> 0, = 0$, ou < 0, ce qui revient, par la substitution de la valeur de l_1, à considérer ces trois cas :

$$\text{I)} \quad n > \frac{b - C}{C} \omega \cos \zeta_0;$$
$$\text{II)} \quad n = \frac{b - C}{C} \omega \cos \zeta_0;$$
$$\text{III)} \quad n < \frac{b - C}{C} \omega \cos \zeta_0.$$

On remarquera que le second membre de ces inégalités n'est autre chose que la vitesse angulaire ν qui répond à l'équilibre

relatif de l'axe $O\zeta$. De plus, le cas I) comporte trois hypothèses subsidiaires *a*), *b*), *c*), selon que l'on a

$$f < 1, \quad = 1, \quad \text{ou} \quad > 1,$$

ou, sous une autre forme,

$$a) \quad n < \frac{\omega}{C}\left(b\cos^2\frac{\zeta_0}{2} - C\cos\zeta_0\right),$$

$$b) \quad n = \frac{\omega}{C}\left(b\cos^2\frac{\zeta_0}{2} - C\cos\zeta_0\right),$$

$$c) \quad n > \frac{\omega}{C}\left(b\cos^2\frac{\zeta_0}{2} - C\cos\zeta_0\right).$$

Cas I, *a*).

$$n > \frac{b-C}{C}\omega\cos\zeta_0, \qquad n < \frac{\omega}{C}\left(b\cos^2\frac{\zeta_0}{2} - C\cos\zeta_0\right).$$

L'axe $O\zeta$ *du gyroscope oscille en s'approchant et s'éloignant alternativement de la direction* OZ *sans l'atteindre, l'angle* ζ *variant entre la limite supérieure* ζ_0 *et une limite inférieure* ζ_1 *donnée par l'équation*

$$\cos\zeta_1 = \frac{2Cl_1}{\omega b} - \cos\zeta_0.$$

L'angle ζ s'exprime en fonction du temps par les équations (19), (20) et (22), dans lesquelles on fera

$$\alpha = \frac{\zeta_0 + \zeta_1}{2}, \qquad \beta = \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{2},$$

$$k = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \qquad \rho = \omega\sqrt{\frac{b}{a}}\sin\alpha.$$

La durée d'une oscillation complète de l'axe $O\zeta$ sera

$$\tau = \frac{4K}{\rho} = \frac{4K}{\omega\sin\alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Cas I, *b*). C'est un cas-limite du précédent. L'axe $O\zeta$ s'approche indéfiniment de OZ sans atteindre jamais cette position-limite.

Cas I, *c*).

$$n > \frac{b - C}{C}\omega\cos\zeta_0, \qquad n > \frac{\omega}{c}\left(b\cos^2\frac{\zeta_0}{2} - C\cos\zeta_0\right).$$

L'angle ζ varie entre les valeurs extrêmes $+\zeta_0$ et $-\zeta_0$, de sorte que *l'axe de figure du tore oscille également de part et d'autre de la position* OZ, *et périodiquement*. L'angle ζ est exprimé en fonction de t par les équations (29), dans lesquelles on a

$$\alpha = \frac{\zeta_0}{2}, \quad \sin\beta = \sin\tfrac{1}{2}\zeta_0\sqrt{\frac{\omega b}{Cn + (C-b)\omega\cos\zeta_0}},$$

$$k = \frac{1 - \cos\alpha\cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}, \qquad \rho = \omega\sqrt{\frac{b}{a}\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}}(1 + \cos\alpha\cos\beta).$$

La durée de l'oscillation complète de l'axe $O\zeta$ sera

$$\tau = \frac{8K}{\rho}.$$

18. L'hypothèse II) correspond, d'après ce que l'on a vu au n° 15, à l'équilibre relatif de l'axe $O\zeta$; ζ est ici constant et égal à ζ_0, φ' est constant et égal à n.

Enfin, le cas III) se rapporte, dans le mouvement du pendule, au cas que nous avons discuté au n° 13. *L'axe* $O\zeta$ *oscille encore en restant toujours du même côté de* OZ, *mais en s'éloignant d'abord, puis se rapprochant périodiquement de* OZ. L'angle ζ varie entre son *minimum* ζ_0 et son *maximum* ζ_1 déterminé par l'équation

$$\cos\zeta_1 = \frac{2Cl_1}{\omega b} - \cos\zeta_0.$$

Le mouvement de l'axe est représenté par les formules (32) à (36), et la durée d'une oscillation a pour valeur

$$\tau = \frac{4K}{\omega \sin \alpha}\sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Nous aurions maintenant à examiner l'hypothèse B), qui donne pour r une valeur négative. Mais nous avons expliqué au n° 3 que la supposition d'une valeur négative de r dans le problème du pendule répond à un renversement dans le sens de la pesanteur, en sorte qu'il suffira, dans tout ce qui précède, de remplacer OZ par OZ′ ou de compter l'angle ζ à partir de OZ′ pour retomber sur les mêmes formules. La discussion est donc inutile, et le problème, dans l'hypothèse B), sera résolu par cette seule modification.

19. Reste enfin l'hypothèse C) où l'on a

$$n + \omega \cos \zeta_0 = 0, \qquad n = -\omega \cos \zeta_0.$$

La vitesse initiale absolue du tore a donc une composante nulle suivant l'axe Oζ. Dans ce cas intéressant, l'équation (40) se réduit à la forme

$$(44) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{\omega^2 b}{a}(\cos^2\zeta_0 - \cos^2\zeta).$$

Il en résulte évidemment que $\cos^2\zeta$ est toujours plus petit que $\cos^2\zeta_0$, de sorte que ζ varie entre les limites extrêmes ζ_0 et $\pi - \zeta_0$. Donc

L'axe Oζ *exécute des oscillations d'égale amplitude et d'égale durée de part et d'autre de la perpendiculaire* OV′ *à* OZ. Pour exprimer l'angle ζ en fonction du temps, nous poserons

$$\frac{b}{a} = \mu$$

d'où nous tirerons, suivant que ζ_0 est $< $ ou $> \frac{\pi}{2}$,

$$\omega\sqrt{\mu}.dt = \pm\frac{d\zeta}{\sqrt{\cos^2\zeta_0 - \cos^2\zeta}}.$$

Si nous faisons ensuite

$$\cos\zeta = x\cos\zeta_0, \qquad k^2 = \cos^2\zeta_0,$$

x variera entre -1 et $+1$, et la substitution donnera

$$\omega\sqrt{\mu}\,dt = -\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

d'où l'on tire, en intégrant et observant que pour $t=0$ on a $\zeta=\zeta_0$ et $x=1$,

$$\omega\sqrt{\mu}\,.\,t = \int_x^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = K - \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

d'où, enfin,

(45) . . . $x = \mathrm{sn}(K-\omega t\sqrt{\mu}) = \mathrm{sn}(\omega t\sqrt{\mu}+K)$,

ou, si l'on fait usage des fonctions θ,

$$\cos\zeta = \frac{\cos\zeta_0}{\sqrt{k}}\,\frac{\theta_2(\omega t\sqrt{\mu})}{\theta_3(\omega t\sqrt{\mu})},$$

ou enfin, à cause de la relation entre k et ζ_0,

(46) . . . . . $\cos\zeta = \pm\sqrt{k}\,\dfrac{\theta_2(\omega t\sqrt{\mu})}{\theta_3(\omega t\sqrt{\mu})}$,

le signe $+$ se rapportant au cas où $\cos\zeta_0$ est positif, le signe $-$ au cas où il est négatif.

Il suit de la formule (45) que $\cos\zeta$, égal à $\cos\zeta_0$ pour $t=0$, devient nul pour $\omega t\sqrt{\mu} = K$, ou

$$t = \frac{K}{\omega\sqrt{\mu}};$$

puis égal à $-\cos\zeta_0$ pour

$$t = \frac{2K}{\omega\sqrt{\mu}},$$

et ainsi de suite; et que la durée d'une oscillation entière de l'axe du tore est

$$\tau = \frac{4K}{\omega\sqrt{\mu}}.$$

20. Il est encore un cas particulier qui mérite d'être signalé. Dans la construction ordinaire du gyroscope, la quantité

$$b = A + C_1 - A_1$$

est positive; mais on pourrait cependant, par une disposition exceptionnelle, réaliser la condition

$$b = 0, \quad \text{ou} \quad A + C_1 - A_1 = 0\ (*).$$

Dans ce cas, l'équation (40) se réduirait à

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{2Cl_1\omega}{a}(\cos\zeta - \cos\zeta_0),$$

c'est-à-dire à l'équation ordinaire du mouvement du pendule simple. La longueur r du pendule synchrone serait

$$r = \frac{ga}{Cl_1\omega} = \frac{ga}{C\omega(n + \omega\cos\zeta_0)},$$

la même, par conséquent, que celle de la formule (43) qui se rapporte au cas général. Mais il n'y aurait plus, dans ce cas-ci, de rotation du plan d'oscillation du pendule.

Dans cette hypothèse toute particulière, *le mouvement d'oscillation de l'axe du gyroscope serait donc un simple mouvement pendulaire ordinaire.*

(*) Il suffirait pour cela que le disque fût un cylindre massif de rayon R et d'épaisseur $2h$; l'anneau intérieur un tube cylindrique de hauteur $2h'$, dont les rayons intérieur et extérieur seraient R' et R'', et que l'on eût entre ces éléments la relation

$$R^2h\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{3}\right) = h'(R''^2 - R'^2)\left(\frac{h'^2}{3} - \frac{R'^2 + R''^2}{4}\right),$$

avec la condition

$$R'' > R' > R.$$

On trouvera toujours une valeur de h' propre à vérifier cette équation.

§ V.

(*Suite.*) ROTATION DU TORE DANS SON PLAN.

21. Il nous reste, pour achever la détermination du mouvement du disque, à trouver l'expression de l'angle φ en fonction du temps. Pour cela, nous reprenons l'équation (38), nous multiplions les deux membres par dt, et en intégrant entre 0 et t, nous trouverons, φ_0 étant la valeur initiale de φ,

$$\varphi = \varphi_0 + nt - \omega \int_0^t (\cos\zeta - \cos\zeta_0)\, dt,$$

ou, si nous posons

$$u = \rho t + \mathrm{K}$$

et si nous observons que $t = 0$ donne $u = \mathrm{K}$,

$$(47) \quad \ldots \quad \varphi = \varphi_0 + nt - \frac{\omega}{\rho} \int_{\mathrm{K}}^{u} (\cos\zeta - \cos\zeta_0)\, du.$$

On remplacera $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ par sa valeur, donnée, suivant le cas, par l'une des égalités (21), (29) ou (34), et l'on effectuera l'intégration. Mais, pour cela, nous devrons faire usage de certaines formules de la théorie des fonctions elliptiques que nous allons d'abord établir d'une manière générale, parce qu'elles nous seront souvent utiles par la suite.

Soit à trouver la valeur de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{K}}^{u} \frac{\alpha + \beta\,\mathrm{sn}\,u}{\gamma + \delta\,\mathrm{sn}\,u}\, du,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des constantes données quelconques.

On a identiquement

$$\frac{\alpha + \beta\,\mathrm{sn}\,u}{\gamma + \delta\,\mathrm{sn}\,u} = \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma} \frac{\delta\,\mathrm{sn}^2 u}{\gamma^2 - \delta^2\,\mathrm{sn}^2 u} - (\alpha\delta - \beta\gamma) \frac{\mathrm{sn}\,u}{\gamma^2 - \delta^2\,\mathrm{sn}^2 u}.$$

Multiplions toute l'équation par du et intégrons depuis $u = K$ jusqu'à u; posons en outre, k désignant le module de la fonction elliptique sn u,

$$\frac{\delta}{\gamma} = k \operatorname{sn} a,$$

l'*argument* a étant déterminé par cette équation. Il viendra

$$(48)\left\{\int_K^u \frac{\alpha+\beta \operatorname{sn} u}{\gamma+\delta \operatorname{sn} u}\,du = \frac{\alpha}{\gamma}(u-K) + \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\int_K^u \frac{k \operatorname{sn} a \operatorname{sn}^2 u}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}\,du\right.$$
$$\left. - \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2}\int_K^u \frac{\operatorname{sn} u\,du}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u}.\right.$$

Mais une formule très connue de la théorie des fonctions elliptiques donne d'abord

$$\int_K^u \frac{k \operatorname{sn} a \operatorname{sn}^2 u\,du}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}\left[\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}(u-K) + \frac{1}{2}\,l.\,\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\right],$$

le logarithme népérien l. étant d'ailleurs supposé s'annuler en même temps que u. Pour obtenir la valeur de l'autre intégrale, posons

$$a = a_1 + K, \qquad u = z + K,$$

et observons que

$$\operatorname{sn}(z+K) = \frac{\operatorname{cn} z}{\operatorname{dn} z}.$$

Il viendra

$$\int_K^u \frac{\operatorname{sn} u\,du}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \int_0^z \frac{\operatorname{sn}(z+K)\,dz}{1-k^2 \operatorname{sn}^2(a_1+K) \operatorname{sn}^2(z+K)}$$
$$= \int_0^z \frac{\operatorname{dn}^2 a_1 \operatorname{cn} z \operatorname{dn} z\,dz}{\operatorname{dn}^2 a_1 \operatorname{dn}^2 z - k^2 \operatorname{cn}^2 a_1 \operatorname{cn}^2 z} = \frac{\operatorname{dn}^2 a_1}{k'^2}\int_0^z \frac{\operatorname{cn} z \operatorname{dn} z\,dz}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a_1 \operatorname{sn}^2 z}$$
$$= \frac{\operatorname{dn}^2 a_1}{k'^2}\int_0^z \frac{d.\operatorname{sn} z}{1-k^2 \operatorname{sn}^2 a_1 \operatorname{sn}^2 z}.$$

Mais on a

$$\frac{d.\operatorname{sn} z}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a_1 \operatorname{sn}^2 z} = \frac{1}{2}\frac{d.\operatorname{sn} z}{1+k\operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} z} + \frac{1}{2}\frac{d.\operatorname{sn} z}{1-k\operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} z},$$

d'où

$$\int_0^z \frac{d.\operatorname{sn} z}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a_1 \operatorname{sn}^2 z} = \frac{1}{2k\operatorname{sn} a_1} \text{l.} \frac{1+k\operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} z}{1-k\operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} z}.$$

Substituant et mettant pour a_1 et z leurs valeurs, on trouvera facilement

$$(\alpha)\int_K^u \frac{\operatorname{sn} u\, du}{1-k^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 u} = \frac{1}{2k\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \text{l.} \left[\frac{1-k\operatorname{sn}(a+K)\operatorname{sn}(u+K)}{1+k\operatorname{sn}(a+K)\operatorname{sn}(u+K)}\right].$$

Portant ces divers résultats dans l'équation (48), on aura définitivement la formule

$$(49)\left\{\int_K^u \frac{\alpha+\beta\operatorname{sn} u}{\gamma+\delta\operatorname{sn} u}du = \frac{\alpha}{\gamma}(u-K) + \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\gamma^2 k\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}\cdot\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}(u-K)\right.$$
$$\left. + \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{2\gamma^2 k\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \text{l.} \left[\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\cdot\frac{1+k\operatorname{sn}(a+K)\operatorname{sn}(u+K)}{1-k\operatorname{sn}(a+K)\operatorname{sn}(u+K)}\right].\right.$$

On se rappellera que l'argument a qui figure dans cette équation est déterminé par la relation

$$\frac{\delta}{\gamma} = k\operatorname{sn} a.$$

22. Revenons maintenant à l'équation (47), et examinons successivement les différents cas que le problème nous a offerts.

Cas I, *a*). La valeur de $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ nous est ici donnée (voir au n° 17) par l'équation (21), que nous écrirons sous la forme

$$\cos\zeta - \cos\zeta_0 = \sin\zeta_0 \sin\beta \frac{1-\operatorname{sn} u}{\cos\beta - k\cos\alpha\operatorname{sn} u},$$

équation dans laquelle on sait que

$$\alpha = \frac{1}{2}(\zeta_0 + \zeta_1), \quad \beta = \frac{1}{2}(\zeta_0 - \zeta_1),$$

$$k = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \rho = \omega\sqrt{\mu}\sin\alpha, \quad u = \rho t + \mathrm{K}.$$

L'équation (47) deviendra donc

$$\varphi = \varphi_0 + nt - \frac{k\sin\zeta_0}{\sqrt{\mu}}\int_{\mathrm{K}}^{u} \frac{1 - \mathrm{sn}\,u}{\cos\beta - k\cos\alpha\,\mathrm{sn}\,u}\,du.$$

Il faudra donc, pour appliquer ici la formule (49), y remplacer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, respectivement par

$$1, \qquad -1, \qquad \cos\beta, \qquad -k\cos\alpha,$$

et, par suite, poser

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \cos\beta - k\cos\alpha = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{\sin\zeta_1}{\sin\alpha}.$$

L'argument a est donné par l'équation

$$k\,\mathrm{sn}\,a = -\frac{k\cos\alpha}{\cos\beta},$$

ou

$$\mathrm{sn}\,a = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

Cette valeur est négative, quel que soit le signe de $\cos\zeta_0$, car l'équation

$$\cos\zeta_1 = \frac{2Cl_1}{\omega b} - \cos\zeta_0 = \frac{2C(n + \omega\cos\zeta_0)}{\omega b} - \cos\zeta_0,$$

combinée avec la condition

$$n + \omega\cos\zeta_0 > 0,$$

donne

$$\cos\zeta_0 + \cos\zeta_1 = 2\cos\alpha\cos\beta > 0,$$

donc $\cos\alpha$ et $\cos\beta$ sont de même signe.

D'autre part, on a

$$\mathrm{cn}^2 a = 1 - \mathrm{sn}^2 a = \frac{\cos^2\beta - \cos^2\alpha}{\cos^2\beta} = \frac{\sin\zeta_0 \sin\zeta_1}{\cos^2\beta} > 0,$$

d'où il résulte que l'on a $\mathrm{sn}^2 a < 1$, et par suite

$$\mathrm{sn}\, a < 0 \qquad \text{et} \qquad > -1;$$

a est donc réel et compris entre zéro et — K. Nous poserons en conséquence

$$a = -\sigma,$$

σ désignant un argument compris entre 0 et K. Il viendra ensuite

$$\mathrm{dn}^2 a = 1 - k^2 \mathrm{sn}^2 a = 1 - \frac{\sin^2\beta}{\sin^2\alpha}\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\beta} = \frac{\sin\zeta_0 \sin\zeta_1}{\sin^2\alpha\cos^2\beta},$$

d'où, puisque a est compris entre 0 et — K,

$$\mathrm{cn}\, a = \frac{\sqrt{\sin\zeta_0 \sin\zeta_1}}{\cos\beta}, \quad \mathrm{dn}\, a = \frac{\sqrt{\sin\zeta_0 \sin\zeta_1}}{\sin\alpha\cos\beta},$$

et enfin

$$\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 k\, \mathrm{cn}\, a\, \mathrm{dn}\, a} = \frac{1}{k\sin\zeta_0}.$$

Il suit encore des valeurs de cn a, dn a, que l'on a

$$k\,\mathrm{sn}\,(a + \mathrm{K}) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\frac{\mathrm{cn}\, a}{\mathrm{dn}\, a} = \sin\beta.$$

Substituant ces divers résultats dans l'équation (49), on en déduira

$$\int_{\mathrm{K}}^{u} \frac{1 - \mathrm{sn}\, u}{\cos\beta - k\cos\alpha\,\mathrm{sn}\, u}\, du = \frac{u - \mathrm{K}}{\cos\beta} + \frac{1}{k\sin\zeta_0}\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}(u - \mathrm{K})$$
$$+ \frac{1}{2k\sin\zeta_0} \mathrm{l}.\left[\frac{\theta(u - a)}{\theta(u + a)} \cdot \frac{1 + \sin\beta\,\mathrm{sn}\,(u + \mathrm{K})}{1 - \sin\beta\,\mathrm{sn}\,(u + \mathrm{K})}\right],$$

et en substituant dans l'expression de φ, observant que l'on a

$$u - K = \rho t, \quad \rho = \omega\sqrt{\mu}\sin\alpha, \quad \theta'(-\sigma) = -\theta'(\sigma),$$
$$\theta(z + K) = \theta_3(z),$$

on trouvera enfin

$$(50)\quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + (n - \omega\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\zeta_0)\,t + \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\dfrac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)}\rho t \\ \qquad + \dfrac{1}{2\sqrt{\mu}}\mathrm{l}.\left[\dfrac{\theta_3(\rho t - \sigma)}{\theta_3(\rho t + \sigma)}\cdot\dfrac{1 + \sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}{1 - \sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}\right]. \end{cases}$$

Il résulte de cette équation que l'angle φ, qui détermine la rotation du disque par rapport à l'anneau intérieur, se compose :

1° D'un terme constant, égal à sa valeur initiale;

2° D'un terme proportionnel au temps;

3° D'un terme périodique, dont la période $\frac{4K}{\rho}$ est de même durée que celle de l'oscillation de l'axe du tore par rapport à l'axe fixe OZ.

On voit du reste directement, au moyen de l'équation (38), que la vitesse rotatoire φ' du tore relativement à l'anneau intérieur I, reprend périodiquement sa valeur initiale n, chaque fois que l'axe $O\zeta$ revient à son inclinaison initiale ζ_0, et qu'elle en diffère au contraire le plus possible chaque fois que l'angle ζ atteint la valeur ζ_1.

23. *Cas* I, *c*). — La valeur de $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ est donnée dans ce cas (voir le n° 17) par la troisième équation (29), savoir :

$$\cos\zeta - \cos\zeta_0 = \sin\alpha\sin 2\alpha\,\frac{1 - \mathrm{sn}\,(\rho t + K)}{(\cos\alpha + \cos\beta) - (\cos\alpha - \cos\beta)\,\mathrm{sn}\,(\rho t + K)},$$

dans laquelle on devra poser

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\zeta_0, \quad \sin\beta = \sin\tfrac{1}{2}\zeta_0\sqrt{\frac{\omega b}{Cn + (C - b)\,\omega\cos\zeta_0}},$$
$$k = \frac{1 - \cos\alpha\cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}, \quad \rho = \omega\sqrt{\mu}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(1 + \cos\alpha\cos\beta).$$

La formule (47) deviendra, en conséquence,

$$(51)\quad \varphi = \varphi_0 + nt - \frac{\omega}{\rho}\sin\alpha\sin 2\alpha \int_K^{\omega} \frac{1 - \operatorname{sn} u}{(\cos\alpha + \cos\beta) - (\cos\alpha - \cos\beta)\operatorname{sn} u}\, du.$$

Pour déduire la valeur de cette intégrale de l'équation (49), il suffira de remplacer dans celle-ci α, β, γ, δ respectivement par

$$1, \quad -1, \quad \cos\alpha + \cos\beta, \quad -(\cos\alpha - \cos\beta),$$

et par suite,

$$\alpha\delta - \beta\gamma \quad \text{par} \quad 2\cos\beta,$$

$$k\operatorname{sn} a \quad \text{par} \quad -\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Les angles α, β, étant moindres que 90°, la valeur de sn a sera positive ou négative suivant que l'on aura

$$\alpha \gtrless \beta, \quad \text{ou} \quad 2b\omega\cos^2\tfrac{1}{2}\zeta_0 \lessgtr C(n + \omega\cos\zeta_0).$$

Les deux hypothèses sont admissibles, puisque nous n'excluons aucune valeur du rapport $n : \omega$. Nous tirerons ensuite de là

$$\operatorname{cn}^2 a = 1 - \operatorname{sn}^2 a = 1 - \frac{(\cos\alpha - \cos\beta)^2}{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}\frac{(1 + \cos\alpha\cos\beta)^2}{(1 - \cos\alpha\cos\beta)^2}$$

$$= \frac{4\cos\alpha\cos\beta\sin^2\alpha\sin^2\beta}{(\cos\alpha + \cos\beta)^2(1 - \cos\alpha\cos\beta)^2} > 0,$$

donc

$$1 - \operatorname{sn}^2 a > 0, \quad \operatorname{sn}^2 a < 1,$$

en sorte que a est réel et compris entre zéro et $\pm$ K, suivant que a est $\gtrless \beta$; donc cn a, dn a seront positifs. Enfin, on a encore

$$\operatorname{dn}^2 a = 1 - k^2\operatorname{sn}^2 a = 1 - \frac{(\cos\alpha - \cos\beta)^2}{(\cos\alpha + \cos\beta)^2} = \frac{4\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha + \cos\beta)^2}.$$

De là on tire, par substitution et réduction, la valeur

$$\frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma^2 k \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} = \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta\sin 2\alpha}$$

à substituer dans la formule (49). On obtient ainsi

$$\int_{\mathrm{K}}^{u} \frac{1 - \operatorname{sn} u}{(\cos\alpha + \cos\beta) - (\cos\alpha - \cos\beta)\operatorname{sn} u}\, du = \frac{u - \mathrm{K}}{\cos\alpha + \cos\beta}$$
$$+ \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{\sin\beta\sin 2\alpha} \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} (u - \mathrm{K})$$
$$+ \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta}{2\sin\beta\sin 2\alpha} \mathrm{l}. \left[\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)} \frac{1 + k\operatorname{sn}(a+k)\operatorname{sn}(u+\mathrm{K})}{1 - k\operatorname{sn}(a+k)\operatorname{sn}(u+\mathrm{K})}\right].$$

Reportons cette valeur dans l'équation (51); remplaçons u par $\rho t + \mathrm{K}$, a par $\pm\sigma$, l'argument σ étant compris entre zéro et K; $\theta(\rho t + \mathrm{K} \pm \sigma)$ par $\theta_3(\rho t \pm \sigma)$; observons aussi que l'on a

$$\rho = \omega\sqrt{\mu}\, \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}(1 + \cos\alpha\cos\beta),$$

$$k\operatorname{sn}(a + \mathrm{K}) = \frac{1 - \cos\alpha\cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta} \cdot \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{sn}(\rho t + 2\mathrm{K}) = -\operatorname{sn}\rho t;$$

nous aurons définitivement

$$(52)\quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \left(n - \dfrac{\omega\sin\alpha\sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta}\right) t \mp \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \dfrac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)} \rho t \\ - \dfrac{1}{2\sqrt{\mu}} \mathrm{l}. \left[\dfrac{\theta_3(\rho t \mp \sigma)}{\theta_3(\rho t \pm \sigma)} \cdot \dfrac{1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\operatorname{sn}\rho t}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\operatorname{sn}\rho t}\right], \end{cases}$$

le signe supérieur se rapportant au cas de $\alpha > \beta$, le signe inférieur au cas de $\alpha < \beta$.

L'angle φ se composera donc encore ici d'un terme proportionnel au temps et d'un terme périodique, dont la période sera la même que celle du mouvement de *nutation* de l'axe $O\zeta$.

24. *Cas* III). — La valeur de $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ est ici donnée (voir le n° 18) par la formule (34), dans laquelle on a

$$\alpha = \frac{\zeta_0 + \zeta_1}{2}, \quad \beta = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{2}, \quad k = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad \rho = \omega\sqrt{\mu}\sin\alpha,$$

Nous aurons donc

$$\cos\zeta - \cos\zeta_0 = -\sin\zeta_0 \sin\beta \frac{1 - \operatorname{sn} u}{\cos\beta + k\cos\alpha \operatorname{sn} u},$$

et l'équation (47) deviendra

$$\varphi = \varphi_0 + nt + \frac{k\sin\zeta_0}{\sqrt{\mu}} \int_K^u \frac{1 - \operatorname{sn} u}{\cos\beta + k\cos\alpha \operatorname{sn} u}\, du.$$

Le calcul est absolument le même qu'au n° 22, *cas* I, *a*). Nous nous bornerons donc à donner le résultat, qui est le suivant :

$$(53)\quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + (n + \omega \operatorname{tg}\beta \sin\zeta_0)\, t \\ \qquad + \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \dfrac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)} \rho t + \dfrac{1}{2\sqrt{\mu}} \operatorname{l.} \left[\dfrac{\theta_2(\rho t - \sigma)}{\theta_2(\rho t + \sigma)} \dfrac{1 - \sin\beta \operatorname{sn}\rho t}{1 + \sin\beta \operatorname{sn}\rho t} \right]. \end{array} \right.$$

Dans cette équation, σ désigne un argument compris entre zéro et K, déterminé par l'équation

$$\operatorname{sn}\sigma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

25. Nous avons traité les différents cas qui se rapportent à l'hypothèse

$$n + \omega \cos \zeta_0 > 0.$$

Les cas dans lesquels cette même expression est négative se ramènent à ceux-là, comme nous l'avons vu (n° 18), en supposant que la direction de l'axe des z positifs soit renversée, et ne nous offriraient par conséquent aucun calcul nouveau. Mais il nous reste à chercher l'expression de φ dans le cas particulier discuté au n° 19, savoir

$$n + \omega \cos \zeta_0 = 0.$$

L'équation (38) se réduit ici évidemment à

$$\frac{d\varphi}{dt} = -\omega \cos \zeta,$$

et donne, par l'intégration,

$$\varphi = \varphi_0 - \omega \int_0^t \cos \zeta \, dt.$$

Or, nous avons trouvé l'équation

(45). . . . . $\cos \zeta = \cos \zeta_0 \operatorname{sn} (\omega t \sqrt{\mu} + \mathrm{K})$,

le module k étant égal à la valeur absolue de $\cos \zeta_0$; si donc nous posons

$$\omega t \sqrt{\mu} + \mathrm{K} = u,$$

il viendra

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\cos \zeta_0}{\sqrt{\mu}} \int_{\mathrm{K}}^{u} \operatorname{sn} u \, du.$$

Cette intégrale est comprise comme cas particulier dans la formule (α) du n° 21; il suffit d'y supposer l'argument a égal à zéro, d'où

$$\operatorname{sn} a = 0, \qquad \operatorname{dn} a = \operatorname{cn} a = 1.$$

Il viendra

$$\int_{\mathrm{K}}^{u} \operatorname{sn} u \, du = \frac{1}{2k} \mathrm{l}. \frac{1 - k \operatorname{sn} (u + \mathrm{K})}{1 + k \operatorname{sn} (u + \mathrm{K})}.$$

D'après cela, nous aurons, en remettant pour u sa valeur,

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\cos\zeta_0}{2k\sqrt{\mu}} \text{l.} \frac{1 + k\,\text{sn}\,\omega t\sqrt{\mu}}{1 - k\,\text{sn}\,\omega t\sqrt{\mu}}.$$

Observons que k est égal à $\pm\cos\zeta_0$ suivant que ζ_0 est $<$ ou $> \frac{\pi}{2}$; que, de plus, on peut faire l'angle φ_0 nul, en prenant pour le rayon $O\xi$ de l'équateur du tore, celui qui coïncide à l'époque $t = 0$ avec la droite OX_1. Nous aurons ainsi

$$(54) \quad \ldots \quad \varphi = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \text{l.} \frac{1 - \cos\zeta_0\,\text{sn}\,\omega t\sqrt{\mu}}{1 + \cos\zeta_0\,\text{sn}\,\omega t\sqrt{\mu}}.$$

Cette expression très simple de l'angle φ manifeste une propriété curieuse du mouvement de rotation du disque dans le cas que nous considérons. Elle ne renferme plus de terme proportionnel au temps, mais simplement *une fonction périodique du temps*, dont la période est la même que celle de l'oscillation de l'axe du tore. Ainsi, φ est nul pour $t = 0$; de $t = 0$ à $t = \frac{K}{\omega\sqrt{\mu}}$, l'angle ζ varie de ζ_0 à $\frac{1}{2}\pi$ et, ζ_0 étant supposé $< \frac{\pi}{2}$, l'angle φ décroît jusqu'à

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{l.}\,\text{tg}\frac{\zeta_0}{2},$$

valeur *minimum*. De $t = \frac{K}{\omega\sqrt{\mu}}$ à $t = \frac{2K}{\omega\sqrt{\mu}}$, ζ varie de $\frac{1}{2}\pi$ à $\pi - \zeta_0$, et l'angle φ revient à la valeur zéro. Puis il croît jusqu'à la limite supérieure

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \text{l.}\cot\frac{\zeta_0}{2},$$

pendant que t varie de

$$\frac{2K}{\omega\sqrt{\mu}} \quad \text{à} \quad \frac{3K}{\omega\sqrt{\mu}},$$

et ζ de $\pi - \zeta_0$ à $\frac{1}{2}\pi$; enfin φ revient à la valeur zéro lorsque t atteint la valeur $\frac{4K}{\omega\sqrt{\mu}}$, ζ reprenant la valeur ζ_0. Puis les angles ζ et φ repassent par la même succession de valeurs dans les mêmes intervalles de temps. Le disque n'accomplit donc jamais

une rotation complète par rapport à la chape intérieure I, mais seulement des oscillations comprises entre les limites d'angle

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{l.tg} \frac{\zeta_0}{2}, \quad \varphi = -\frac{1}{\sqrt{\mu}} \operatorname{l.tg} \frac{\zeta_0}{2}.$$

§ VI.

POLYTROPE DE M. SIRE.

26. On sait que le *polytrope* de M. Sire, destiné à imiter les effets que la rotation de la terre produit sur les corps tournant à sa surface, et dont la description se trouve d'ailleurs dans les *Mémoires de la Société d'émulation du Doubs* (*), se compose essentiellement 1° d'un grand cercle en cuivre C (fig. 5) figurant un méridien terrestre, auquel on imprime, au moyen d'un système de roues d'angle actionné par une manivelle, une rotation continue autour de son diamètre vertical SS', qui représente l'axe de rotation de la terre; 2° d'un gyroscope composé d'un tore D et de deux anneaux I, E, semblable à celui que nous avons décrit au § IV. Ce gyroscope est fixé par une pince P à la cir-

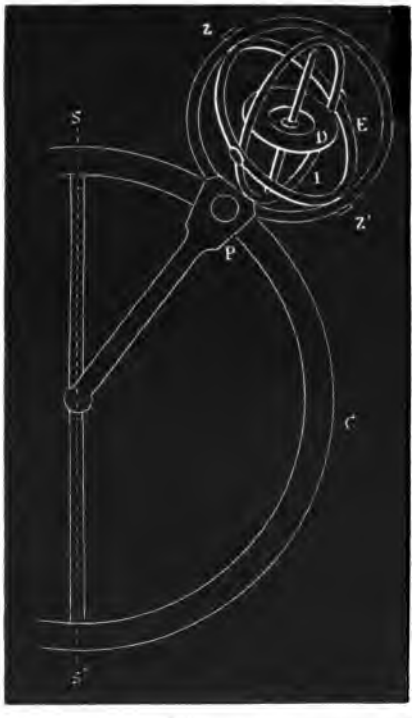


Fig. 5.

(*) 1864.

conférence du cercle C, et de telle sorte que l'axe ZZ′ autour duquel tourne l'anneau extérieur E soit maintenu fixe dans le plan du méridien. Dans les expériences de M. Sire, l'axe ZZ′ était habituellement dirigé suivant le rayon du méridien, mais nous supposerons, pour plus de généralité, qu'il ait une direction fixe quelconque dans le plan de celui-ci.

Nous plaçons l'origine O du système de comparaison OXYZ (fig. 6) au centre du gyroscope; OZ sera l'axe de l'anneau extérieur, le plan XY lui étant perpendiculaire et lié au méridien mobile; OS est parallèle à la direction *positive* de l'axe de rotation du méridien ou cercle C; OX est la projection de OS sur le plan XY, et se trouve ainsi dans le plan du méridien auquel OY est perpendiculaire. Appelons λ l'angle SOX, θ l'angle ZOζ compris entre l'axe du tore et l'axe OZ de l'anneau E; ψ l'angle X_1OX compris entre OX et la trace OX_1 de l'équateur du tore sur le plan XY; φ l'angle $X_1O\xi$ compris entre OX_1 et un rayon mobile Oξ de l'équateur du tore : θ, ψ et φ sont les trois angles bien connus qui définissent la position du tore et de ses anneaux par rapport au système mobile OXYZ. L'angle θ est compté positivement de 0° à 180°, à partir de OZ, de gauche à droite autour de OX_1; ψ de 0° à ∞, de gauche à droite par rapport à OZ; φ de 0° à ∞, de gauche à droite par rapport à la direction Oζ de l'axe de figure du tore. Soient encore γ, γ_1, γ_2 les angles que forment respectivement les axes principaux d'inertie OX_1, OY_1, Oζ du tore avec la direction OS de l'axe instantané du système de comparaison; ω la vitesse angulaire du méridien autour de son axe, et calculons les quantités nécessaires pour former l'équation (2).

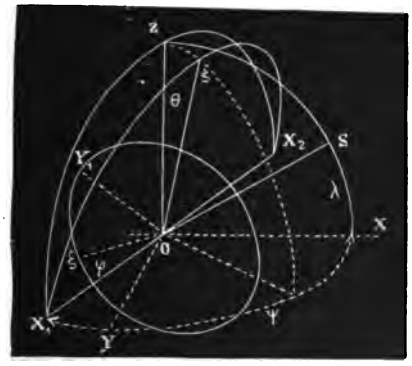


Fig. 6.

Le mouvement relatif du tore par rapport à OXYZ se com-

pose d'une rotation θ' autour de OX_1, d'une rotation ψ' autour de OZ, d'une rotation φ' autour de $O\zeta$. Les composantes de la rotation instantanée du tore suivant OX_1, OY_1, $O\zeta$ sont donc respectivement

$$\theta', \quad \psi' \sin\theta, \quad \varphi' + \psi' \cos\theta,$$

et comme les moments d'inertie du tore par rapport à ces axes sont A, A, C, on aura, *pour le tore seul*, d'après des théorèmes bien connus,

$$T = \tfrac{1}{2}\left[A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2\right],$$
$$G = \tfrac{1}{2}\omega^2\left[A(\cos^2\gamma + \cos^2\gamma_1) + C\cos^2\gamma_2\right],$$
$$V = \omega\left[A\theta' \cos\gamma + A\psi' \sin\theta \cos\gamma_1 + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)\cos\gamma_2\right].$$

Pour calculer les quantités correspondantes dans le mouvement de l'anneau intérieur, il suffit d'observer que les axes d'inertie OX_1, OY_1, $O\zeta$ sont ici remplacés respectivement par OX_2, $O\zeta$, OY_1, en sorte qu'on devra remplacer θ, ψ, φ, γ, γ_1, γ_2, A, A, C, respectivement par $\frac{\pi}{2} - \theta$, $\pi + \psi$, 0, $\pi - \gamma$, γ_2, γ_1, A_1, A_1, C_1, et l'on aura, *pour l'anneau* I,

$$T = \tfrac{1}{2}\left[A_1(\theta'^2 + \psi'^2 \cos^2\theta) + C_1\psi'^2 \sin^2\theta\right],$$
$$G = \tfrac{1}{2}\omega^2\left[A_1(\cos^2\gamma + \cos^2\gamma_2) + C_1\cos^2\gamma_1\right],$$
$$V = \omega(A_1\theta' \cos\gamma + A_1\psi' \cos\theta \cos\gamma_2 + C_1\psi' \sin\theta \cos\gamma_1).$$

Enfin, l'anneau E n'a qu'une simple rotation relative ψ' autour de OZ; donc pour cet anneau,

$$T = \tfrac{1}{2}A_2\psi'^2, \quad G = \tfrac{1}{2}\omega^2(A_2\cos^2\gamma + A_2\sin^2\lambda + C_2\cos^2\lambda\sin^2\psi),$$
$$V = \omega A_2\psi' \sin\lambda.$$

Réunissant ces différents termes, nous aurons, *pour le système* (D, I, E) *tout entier*, d'après l'équation (4),

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\left[(A + A_1)\theta'^2 + (A + C_1)\psi'^2\sin^2\theta + A_1\psi'^2\cos^2\theta + A_2\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\right] + \tfrac{1}{2}\omega^2\left[(A + A_1 + A_2)\cos^2\gamma + (A + C_1)\cos^2\gamma_1 + (C + A_1)\cos^2\gamma_2 + A_2\sin^2\lambda + C_2\cos^2\lambda\sin^2\psi\right] + \omega\left[(A + A_1)\theta'\cos\gamma + (A + C_1)\psi'\sin\theta\cos\gamma_1 + A_1\psi'\cos\theta\cos\gamma_2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\gamma_2 + A_2\psi'\sin\lambda\right].$$

On a d'ailleurs, comme on le voit facilement, les relations

$$(55)\quad \ldots \quad \begin{cases} \cos\gamma = \cos\lambda\cos\psi, \\ \cos\gamma_1 = \sin\lambda\sin\theta - \cos\lambda\cos\theta\sin\psi, \\ \cos\gamma_2 = \sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\sin\psi. \end{cases}$$

Ayant égard à la première de ces relations et groupant convenablement les termes, on mettra T_2 sous la forme plus simple :

$$\begin{aligned} T_2 = \tfrac{1}{2}\{&(A + A_1)(\theta' + \omega\cos\gamma)^2 + (A + C_1)(\psi'\sin\theta + \omega\cos\gamma_1)^2 \\ &+ A_2(\psi'\cos\theta + \omega\cos\gamma_2)^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta + \omega\cos\gamma_2)^2 \\ &+ A(\psi' + \omega\sin\lambda)^2 + \omega^2\cos^2\lambda(A_2\cos^2\psi + C_2\sin^2\psi)\}, \end{aligned}$$

ou encore, en posant pour abréger l'écriture

$$a = A + A_1, \qquad b = A + C_1 - A_1, \qquad a' = A_1 + A_2,$$

et faisant usage des équations (55), sous celle-ci que nous emploierons de préférence :

$$(56)\quad \ldots \quad \begin{cases} T_2 = \tfrac{1}{2}\{a(\theta' + \omega\cos\gamma)^2 + b(\psi'\sin\theta + \omega\cos\gamma_1)^2 \\ \quad + C(\varphi' + \psi'\cos\theta + \omega\cos\gamma_2)^2 + a'(\psi' + \omega\sin\lambda)^2 \\ \quad + \omega^2\cos^2\lambda\left[A_2 + (A_1 + C_2 - A_2)\sin^2\psi\right]\}. \end{cases}$$

27. Il n'y a d'autre force motrice que la pesanteur; mais comme le centre de gravité commun O des corps D, I, E est fixe relativement au système de comparaison OXYZ, nous aurons évidemment $U = 0$. En outre, N est nul, d'après la remarque du n° 2, puisque l'origine O coïncide avec le centre de gravité de la masse mobile. Les équations du mouvement apparent se réduisent donc à

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = 0,$$

où il faut prendre q successivement égal à φ, ψ, θ. Mais T_2 ne renferme pas φ explicitement, donc

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \varphi'} = \frac{d}{dt} C(\varphi' + \psi' \cos\theta + \omega \cos\gamma_2) = 0,$$

ce qui donne l'intégrale première

$$(57) \quad \ldots \quad \varphi' + \psi' \cos\theta + \omega \cos\gamma_2 = l_1,$$

l_1 désignant une constante à déterminer par les données initiales. Cette intégrale conviendra aux différents cas que nous allons examiner.

28. Problème III. — *Déterminer le mouvement du gyroscope dans le polytrope de Sire, l'état initial étant donné, et les anneaux* I, E *libres de tourner autour de leurs axes respectifs* X_1X_2, ZZ'; *l'axe* OZ *de l'anneau* E *étant en outre fixé parallèlement à l'axe de rotation du méridien* C.

L'axe OZ coïncide donc ici avec OS, $\lambda = \frac{1}{2}\pi$, donc

$$\cos\gamma = 0, \quad \cos\gamma_1 = \sin\theta, \quad \cos\gamma_2 = \cos\theta,$$

et l'équation (56) se réduit à

$$(58) \quad T_2 = \tfrac{1}{2}\left[a\theta'^2 + b(\psi' + \omega)^2 \sin^2\theta + C(\varphi' + \overline{\psi' + \omega}\cos\theta)^2 + a'(\psi' + \omega)^2\right],$$

tandis que l'intégrale (57) devient

$$(59) \quad \ldots \quad \varphi' + (\psi' + \omega)\cos\theta = l_1.$$

Faisant successivement $q = \psi$, θ dans l'équation de Bour, on aura, T_2 ne renfermant pas ψ explicitement,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial \psi'} = 0,$$

d'où

$$(a' + b\sin^2\theta)(\psi' + \omega) + C(\varphi' + \overline{\psi' + \omega}\cos\theta)\cos\theta = l_2,$$

l_2 étant une nouvelle constante arbitraire; ou, en vertu de l'équation (59),

$$(60) \quad \ldots \quad (a' + b\sin^2\theta)(\psi' + \omega) + Cl_1\cos\theta = l_2.$$

Ensuite

$$a\frac{d\theta'}{dt} - b(\psi' + \omega)^2\sin\theta\cos\theta + C(\varphi' + \overline{\psi' + \omega}\cos\theta)(\psi' + \omega)\sin\theta = 0,$$

ou, en remplaçant $\varphi' + (\psi' + \omega)\cos\theta$, $\psi' + \omega$ par leurs valeurs déduites des relations (59) et (60),

$$(61) \quad a\frac{d\theta'}{dt} = \frac{b(l_2 - Cl_1\cos\theta)^2\sin\theta\cos\theta}{(a' + b\sin^2\theta)^2} - \frac{Cl_1(l_2 - Cl_1\cos\theta)\sin\theta}{a' + b\sin^2\theta}.$$

Avant d'intégrer cette équation, cherchons sous quelles conditions l'angle θ resterait constant, de sorte que l'axe de figure du tore garderait constamment la même inclinaison sur la direction OS de l'axe de rotation du méridien C. θ'_0 étant donc supposé nul, soient ψ'_0 la valeur initiale de ψ', n celle de φ' ou la rotation initiale du tore dans son anneau; nous aurons pour déterminer l_1 et l_2 les équations

$$l_1 = n + (\psi'_0 + \omega)\cos\theta_0,$$
$$l_2 = Cl_1\cos\theta_0 + (a' + b\sin^2\theta_0)(\psi'_0 + \omega).$$

Il faut et il suffit, pour que θ soit constant, que $\frac{d\theta'}{dt}$ soit nul pour $t = 0$. Or, si l'on fait dans l'équation (61) $\theta = \theta_0$ et si l'on remplace $l_2 - Cl_1\cos\theta_0$ par sa valeur, on trouve

$$a\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)_0 = (\psi'_0 + \omega)^2 b\sin\theta_0\cos\theta_0 - Cl_1(\psi'_0 + \omega)\sin\theta_0.$$

L'équation qui exprime que l'axe du tore est en repos par rapport à l'anneau E est donc

$$\sin\theta_0(\psi'_0+\omega)[Cl_1-(\psi'_0+\omega)b\cos\theta_0]=0,$$

ou encore, en éliminant l_1,

$$(62)\quad \sin\theta_0(\psi'_0+\omega)[Cn+(C-b)(\psi'_0+\omega)\cos\theta_0]=0.$$

On peut satisfaire à cette condition :

1° En posant $\sin\theta_0=0$, c'est-à-dire

$$\theta_0=0,\quad \text{ou}\quad \theta_0=\pi.$$

L'axe du tore, dans sa position initiale, serait alors parallèle à l'axe de rotation du méridien. θ étant constant, il suit de l'équation (60) que ψ' sera constant et égal à ψ'_0, et de l'équation (59) que φ' sera constant et égal à n. *Le tore aura donc un mouvement de rotation uniforme par rapport à l'anneau intérieur, et celui-ci un mouvement de précession uniforme par rapport au plan du méridien tournant.*

2° En posant

$$\psi'_0+\omega=0,\quad \text{ou}\quad \psi'_0=-\omega,$$

la valeur de θ_0 étant d'ailleurs arbitraire. L'anneau extérieur E aurait donc à l'instant initial, par rapport au méridien, une rotation égale et de sens contraire à celle du méridien lui-même. L'angle θ restant constant, ψ' et φ' restent constants et égaux respectivement à $-\omega$ et à n. Les mouvements *relatifs* de précession et de rotation du tore sont donc encore uniformes.

C'est ce qu'il était facile de prévoir : θ'_0 étant nul et ψ'_0 égal à $-\omega$, par hypothèse, le mouvement du tore autour de son centre de gravité était, à l'époque $t=0$, une rotation autour de son axe de figure, *immobile dans l'espace.* Et comme il n'y a pas de forces motrices agissant sur le tore, il suit des propriétés des axes principaux d'inertie que la direction de cet axe de figure doit rester

invariable dans l'espace et la vitesse de la rotation autour de cet axe également invariable.

3° Enfin, il est une troisième manière de vérifier l'équation (62), c'est de poser

$$Cn + (C - b)(\psi'_0 + \omega)\cos\theta_0 = 0.$$

Si l'on suppose donnés l'angle θ_0 et la vitesse de précession initiale ψ'_0, cette équation fera connaître la vitesse rotatoire à imprimer au tore pour que son axe de figure reste constamment incliné du même angle θ_0 sur l'axe OZ. Cette vitesse sera

$$n = \frac{b - C}{C}(\psi'_0 + \omega)\cos\theta_0.$$

Comme dans les deux autres cas, θ constant déterminera des valeurs constantes pour ψ' et φ'. Si ψ'_0 est nul, c'est-à-dire si l'axe du tore est d'abord en repos relatif par rapport au méridien, la valeur de n se réduira à

$$n = \frac{b - C}{C}\omega\cos\theta_0.$$

Nous avons trouvé la même valeur (n° 15) pour la condition d'équilibre apparent de l'axe du tore dans le deuxième problème. On voit d'ailleurs que ce cas d'équilibre ne peut se réaliser que pour des vitesses rotatoires du tore comparables à la vitesse angulaire ω du méridien C; il n'a donc pu se présenter dans les expériences de M. Sire, où la première vitesse était toujours incomparablement plus grande que la seconde.

29. L'équation (61), multipliée par $2d\theta$, s'intègre et donne

$$(63) \quad \ldots\ldots\ a\frac{d\theta^2}{dt^2} = l_3 - \frac{(l_2 - C_1 l_1\cos\theta)^2}{a' + b\sin^2\theta},$$

l_3 étant une nouvelle constante dont la valeur, si l'on suppose toujours θ_0' égal à zéro, se réduit à

$$l_3 = (\psi_0' + \omega)^2 (a' + b \sin^2 \theta_0).$$

On tire de l'équation (63)

$$dt = \pm \frac{d\theta \sqrt{a (a' + b \sin^2 \theta)}}{\sqrt{l_3 (a' + b \sin^2 \theta) - (l_2 - C l_1 \cos \theta)^2}},$$

de façon que t s'exprime en fonction de θ par une quadrature qui dépend des intégrales hyperelliptiques, en général. Seulement, *si l'on regarde les masses des anneaux comme négligeables vis-à-vis de celle du tore,* on aura

$$a' = A_1 + A_2 = 0, \quad b = A + C_1 - A_1 = A,$$

et si, de plus, on suppose $\psi_0' = 0$, ou l'axe du tore en repos relatif à l'instant $t = 0$, on trouvera simplement

$$\begin{aligned} l_1 &= n + \omega \cos \theta_0, \\ l_2 &= C l_1 \cos \theta_0 + A\omega \sin^2 \theta_0, \\ l_3 &= \omega^2 A \sin^2 \theta_0, \end{aligned}$$

et par suite

$$(64) \quad . \quad . \quad dt = \pm \frac{A \sin \theta d\theta}{\sqrt{\omega^2 A^2 \sin^2 \theta_0 \sin^2 \theta - (l_2 - C l_1 \cos \theta)^2}}.$$

L'intégration s'effectue alors sous forme finie, mais ce calcul a été développé par M. Lottner (*), qui y est arrivé en étudiant le mouvement du gyroscope à la surface de la terre, et Bour (**)

(*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik* de Borchardt, t. LIV, p. 197.

(**) *Journal de mathématiques pures et appliquées* de Liouville, t. VIII, 2e série, 1863, p. 1.

a même donné une interprétation géométrique des formules qui représentent le mouvement de l'axe du tore dans ces conditions. Il n'y aurait aucun intérêt à reproduire ici ces calculs.

Nous observerons seulement ce qui suit :

1° D'après les formules dont il s'agit, l'angle θ oscille entre deux limites plus ou moins rapprochées, et c'est à tort que l'on a regardé souvent l'axe $O\zeta$ comme gardant une inclinaison constante sur l'axe OS, en se fondant sur la propriété des axes principaux d'inertie rapportée ci-dessus. Il faut observer, en effet, qu'ici l'axe $O\zeta$ n'est en repos, à l'époque $t = 0$, que *relativement* au grand cercle C, mais que la rotation de ce cercle lui donne, dans l'espace absolu, un mouvement angulaire dont on doit tenir compte. Toutefois, lorsque la vitesse ω est fort petite par rapport à n, comme cela a lieu dans les expériences que l'on effectue ordinairement avec le polytrope, la quantité sous le radical, dans la formule (64), devant être positive, il en résulte que $l_2 - Cl_1 \cos\theta$ est une petite quantité de même ordre que ω, et que, par suite, $\cos\theta - \cos\theta_0$ est une quantité très petite de même ordre que $\frac{\omega}{n}$. Ce dernier rapport étant fort petit dans les expériences dont nous parlons, θ ne s'écarte pas d'une manière sensible de θ_0, et l'on a la même apparence que si l'axe $O\zeta$ gardait une inclinaison constante sur OZ ou OS. Il en résulte aussi que les valeurs de ψ' et de φ' restent sensiblement constantes.

2° Dans l'analyse que nous avons présentée, les frottements des pivots sont négligés. Toutefois, le frottement qui se produit aux pivots de l'anneau E agit comme une force très minime, qui tendrait à faire tourner le tore autour de OZ; et si la rotation n est assez rapide pour que l'on puisse appliquer, sans erreur sensible, le principe de la *tendance des axes au parallélisme* (*), il en résultera un mouvement très lent de l'axe de figure du tore vers l'axe de rotation OZ.

La détermination des angles ψ et φ, à l'aide de la valeur trouvée pour l'angle θ, ayant été faite par MM. Lottner et Bour, nous laisserons de côté ces questions.

(*) Voy. mon *Cours de mécanique*, 2me édit., p. 304.

§ VII.

POLYTROPE DE M. SIRE (*suite*).

30. PROBLÈME IV. — *Le plan de l'anneau intérieur* I *étant fixé à angle droit sur celui de l'anneau extérieur* E (fig. 7), *qui demeure libre de tourner autour de son axe de rotation* OZ, *orienté d'une façon quelconque dans le plan du méridien, déterminer le mouvement du tore.*

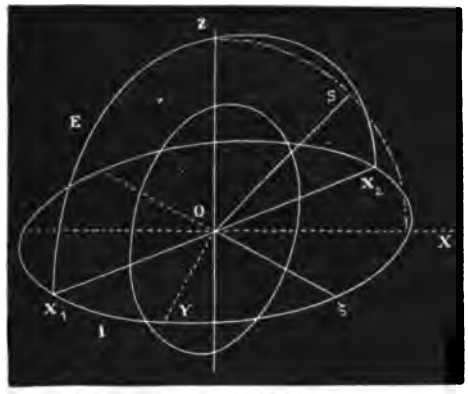


Fig. 7.

L'axe Oζ du tore ne peut, dans ces conditions, se mouvoir que dans un plan normal à l'axe OZ, c'est-à-dire dans le plan XY. On a donc ici

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = 0,$$

et par suite

$$\cos\gamma = \cos\lambda\cos\psi, \quad \cos\gamma_1 = \sin\lambda, \quad \cos\gamma_2 = \cos\lambda\sin\psi.$$

Les seules variables sont ψ et φ.

L'équation (56) se réduit à

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\left[a\omega^2\cos^2\lambda\cos^2\psi + b(\psi' + \omega\sin\lambda)^2 + C(\varphi' + \omega\cos\lambda\sin\psi)^2 + a'(\psi' + \omega\sin\lambda)^2 + \omega^2\cos^2\lambda(A_2 + \overline{A_1 + C_2 - A_2}\sin^2\psi)\right].$$

Réduisons, observons que l'on a

$$A_1 + C_2 - A_2 - a = -A + C_2 - A_2,$$

et introduisons dans les formules, au lieu de l'angle ψ, l'angle

$$\zeta = \psi - \frac{\pi}{2}$$

que fait l'axe $O\zeta$ du tore avec la projection OX de OS sur le plan normal à OZ. Nous aurons, en négligeant le terme constant $A_2 + a$,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\left[(a' + b)(\zeta' + \omega \sin\lambda)^2 + C(\varphi' + \omega \cos\lambda \cos\zeta)^2 - (A + A_2 - C_2)\,\omega^2 \cos^2\lambda \cos^2\zeta\right].$$

L'équation

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = 0,$$

où l'on fera successivement $q = \varphi$, $q = \zeta$, nous donnera

$$(65) \quad \ldots\ldots \varphi' + \omega \cos\lambda \cos\zeta = l_1,$$

l_1 étant constant. Puis, $(a' + b)\,\omega \sin\lambda$ étant aussi constant, nous trouverons

$$(a' + b)\frac{d\zeta'}{dt} + C(\varphi' + \omega \cos\lambda \cos\zeta)\,\omega \cos\lambda \sin\zeta - (A + A_2 - C_2)\,\omega^2 \cos^2\lambda \cos\zeta \sin\zeta = 0,$$

ou, en vertu de l'équation (65),

$$(66) \quad \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{A + A_2 - C_2}{a' + b}\omega^2 \cos^2\lambda \cos\zeta \sin\zeta - \frac{C l_1 \omega \cos\lambda}{a' + b}\sin\zeta.$$

Cette équation, multipliée par $2d\zeta$, s'intègre facilement, et en déterminant la constante par la condition $\zeta'_0 = 0$, on trouve

$$(67) \quad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = -\frac{A + A_2 - C_2}{a' + b}\omega^2 \cos^2\lambda(\cos^2\zeta - \cos^2\zeta_0) + \frac{2 C l_1 \omega \cos\lambda}{a' + b}(\cos\zeta - \cos\zeta_0),$$

ou enfin

$$(68) \quad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{A + A_2 - C_2}{a' + b}\omega^2 \cos^2\lambda(\cos\zeta - \cos\zeta_0)\left[\frac{2 C l_1}{(A + A_2 - C_2)\omega \cos\lambda} - \cos\zeta_0 - \cos\zeta\right].$$

L'équation (66) fournit la condition pour que l'axe du tore reste en équilibre relatif dans son plan directeur, ζ_0' étant, bien entendu, supposé nul. Cette condition s'exprime par l'équation

$$(69) \quad \ldots \sin\zeta_0 \left[(A + A_2 - C_2)\,\omega\cos\lambda\cos\zeta_0 - Cl_1\right] = 0,$$

et peut être vérifiée de deux manières : 1° en posant

$$\sin\zeta_0 = 0, \quad \text{ou} \quad \zeta_0 = 0, \quad \zeta_0 = \pi,$$

ce qui revient à supposer l'axe du tore primitivement couché suivant la projection OX de l'axe OS, ou suivant son prolongement OX′;

2° En posant

$$(A + A_2 - C_2)\,\omega\cos\lambda\cos\zeta_0 - Cl_1 = 0,$$

ce qui devient, en remplaçant l_1 par sa valeur tirée de l'équation (65), savoir

$$l_1 = n + \omega\cos\lambda\cos\zeta_0,$$

$$Cn + (C - A + C_2 - A_2)\,\omega\cos\lambda\cos\zeta_0 = 0.$$

Cette équation donne pour la vitesse de rotation initiale n du tore, l'angle ζ_0 étant supposé donné,

$$n = -\frac{C - A + C_2 - A_2}{C}\,\omega\cos\lambda\cos\zeta_0,$$

valeur du même ordre de grandeur que ω, en sorte que ce cas d'équilibre ne se rencontrera jamais lorsque la rotation du méridien sera très lente vis-à-vis de celle du disque.

Si la vitesse n était donnée, la même équation fournirait la valeur E de l'angle ζ_0 qui correspond à l'équilibre apparent, savoir

$$(70) \quad \ldots \cos E = -\frac{Cn}{(C - A + C_2 - A_2)\,\omega\cos\lambda};$$

si cette valeur est comprise entre — 1 et + 1, elle déterminera deux positions d'équilibre, également inclinées de part et d'autre sur la droite OX.

Ce cas intéressant d'équilibre ne peut s'observer que pour de faibles valeurs de n ou des valeurs très grandes de ω, mais il est certainement réalisable. La difficulté serait de l'*observer*, la rapidité du mouvement du méridien tournant formant obstacle à ce que l'on puisse distinguer la position de l'axe du tore.

21. Lorsque l'axe du tore n'est pas dans une de ces positions d'équilibre relatif, son mouvement dans le plan directeur est régi par l'équation (68). Or, si l'on compare cette équation à l'équation (11) du mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical tournant, on reconnaît qu'elle s'identifiera avec celle-ci, si l'on pose

$$\omega'^2 = \frac{A + A_2 - C_2}{a' + b}\omega^2 \cos^2\lambda,$$

$$\frac{g}{r} = \frac{Cl_1\omega\cos\lambda}{a' + b},$$

ou, $a' + b$ n'étant autre chose que $A + C_1 + A_2$,

$$(71)\quad \ldots \quad \begin{cases} \omega' = \omega\cos\lambda\sqrt{\dfrac{A + A_2 - C_2}{A + A_2 + C_1}}, \\ r = \dfrac{g(A + A_2 + C_1)}{Cl_1\omega\cos\lambda}. \end{cases}$$

La question proposée est donc résolue par ce théorème :

Lorsque, dans le polytrope, l'axe du tore est assujetti à rester dans un plan normal à l'axe de rotation de l'anneau extérieur, son mouvement, par rapport à la projection OX *de l'axe* OS *sur le plan directeur, suit les mêmes lois que le mouvement, par rapport à la verticale, d'un pendule simple dont le plan d'oscillation tournerait autour de la verticale du point de suspension avec une vitesse angulaire constante, la longueur* r *du pendule et la vitesse angulaire* ω' *étant déterminées par les équations* (71).

Il importe de remarquer que l'expression de r renferme l_1 et, par conséquent, ζ_0, d'où il suit que la longueur du pendule de comparaison dépend de l'inclinaison initiale de l'axe $O\zeta$ sur la méridienne OX.

Le signe de r est le même que celui de l_1 ; il faudra donc distinguer, comme dans le problème II, trois hypothèses :

$$\text{A)} \quad n + \omega \cos\lambda \cos\zeta_0 > 0,$$

$$\text{B)} \quad n + \omega \cos\lambda \cos\zeta_0 < 0,$$

$$\text{C)} \quad n + \omega \cos\lambda \cos\zeta_0 = 0.$$

Dans l'hypothèse A), on devra simplement appliquer les formules données dans les paragraphes II et III pour le mouvement du pendule à plan d'oscillation tournant, et l'on aura à discuter des problèmes absolument analogues. La quantité désignée par f aura ici pour expression

$$f = \frac{2Cl_1}{(A + A_2 - C_2)\omega\cos\lambda} - \cos\zeta_0 = \frac{2Cn + (2C - A + C_2 - A_2)\omega\cos\lambda\cos\zeta_0}{(A + A_2 - C_2)\omega\cos\lambda},$$

et les cas désignés par I), II), III) correspondront aux trois hypothèses

$$\cos\zeta_0 \gtreqless \frac{-Cn}{(C - A + C_2 - A_2)\omega\cos\lambda}.$$

Le cas II) est le deuxième cas d'équilibre signalé ci-dessus. Le cas I) comprend les hypothèses subsidiaires

$$f < 1, \quad f = 1, \quad f > 1,$$

ou

$$\cos\zeta_0 \lessgtr \frac{(A + A_2 - C_2)\omega\cos\lambda - 2Cn}{(2C - A + C_2 - A_2)\omega\cos\lambda},$$

toutes réalisables si l'on admet que la valeur de n puisse varier depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. La solution analytique complète du problème mécanique, dans ces différents cas, s'achèvera par de

simples substitutions dans les formules du § III ; il serait donc inutile de reproduire ici ces calculs. Nous ferons seulement, au point de vue mécanique, quelques observations.

1° Dans le cas où l'on a simultanément

$$f > \cos\zeta_0 \quad \text{et} \quad f < 1,$$

l'axe $O\zeta$ *oscille en restant toujours du même côté de la droite* OX, l'angle ζ variant entre deux limites ζ_0 et ζ_1. Cette circonstance curieuse ne pouvait se produire dans les expériences de M. Sire, où n avait toujours une valeur très grande relativement à ω, et où $\cos\zeta_1$, par conséquent, aurait eu une valeur numérique supérieure à l'unité. Aussi ce fait mécanique ne nous paraît pas avoir été soupçonné. Il est certain, pourtant, que pour un rapport convenable de n et de ω, le phénomène de l'oscillation de l'axe d'un même côté de OX se produirait, mais il faudrait recourir à des artifices d'expérimentation pour l'observer.

Au contraire, lorsque f est > 1, l'axe du tore oscille également de part et d'autre du plan du grand cercle ; c'est le cas étudié par M. Sire.

2° L'équation différentielle du mouvement de l'axe du tore étant exactement la même que celle du mouvement pendulaire, nous pouvons appliquer ici les conclusions obtenues dans le § I. Nous avons reconnu que l'axe $O\zeta$ admet *quatre* positions d'équilibre relatif, ou *deux* seulement. Dans le premier cas, celles qui coïncident avec la direction OX ou avec son prolongement sont des positions d'équilibre *instable* ; l'équilibre *stable* se rapporte aux positions définies par l'équation (70), qui sont symétriques par rapport au plan du méridien. Dans le second cas, la position d'équilibre stable coïncide avec OX ou avec son prolongement, suivant que $n + \omega\cos\lambda\cos\zeta_0$ est $>$ ou < 0.

3° Le cas B) où l'on a

$$n + \omega\cos\lambda\cos\zeta_0 < 0$$

se ramène au cas A), comme nous le savons déjà, en renversant dans le pendule de comparaison la direction de la pesanteur, ou en remplaçant ζ par $\pi - \zeta$ dans l'équation différentielle.

Quant au cas particulier

$$C) \quad n + \omega \cos \lambda \cos \zeta_0 = 0,$$

il correspond à celui du problème II dont la discussion se trouve au n° 19. L'axe du tore oscille de part et d'autre d'une perpendiculaire OY au plan du méridien, et les formules de ce mouvement se déduiront de celles du n° 19 en y remplaçant

$$\omega \sqrt{\mu} \quad \text{par} \quad \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{A + A_2 - C_2}{A + C_1 + A_2}}.$$

22. Il reste, pour achever la solution du problème, à calculer la rotation du disque, ou à trouver la valeur de φ en fonction explicite du temps. L'équation (65), où l'on remplacera l_1 par sa valeur, donnera

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \omega \cos \lambda (\cos \zeta - \cos \zeta_0),$$

et, par l'intégration,

$$\varphi = \varphi_0 + nt - \omega \cos \lambda \int_0^t (\cos \zeta - \cos \zeta_0)\, dt.$$

Dans chacun des cas indiqués ci-dessus, $\cos \zeta - \cos \zeta_0$ s'exprimera, comme on l'a vu, en fonction d'un argument

$$u = \rho t + K,$$

par l'une des formules (21), (29) ou (34), et l'on aura ainsi

$$\varphi = \varphi_0 + nt - \frac{\omega \cos \lambda}{\rho} \int_K^u (\cos \zeta - \cos \zeta_0)\, du,$$

ce qui conduira à des intégrations absolument semblables à celles que nous avons effectuées aux n^{os} 22, 23, 24, 25, où l'on n'aura à faire que de simples substitutions dans les coefficients constants. Il ne vaut donc pas la peine de nous y arrêter.

En terminant la discussion de ce problème sur le polytrope, nous ferons une remarque importante au point de vue de la comparaison des résultats offerts par nos calculs avec ceux que l'expérience permet de constater. Nous avons partout supposé que le système de comparaison auquel nous rapportons les mouvements des diverses pièces du gyroscope, c'est-à-dire le grand cercle-méridien C, fût animé d'une rotation ω parfaitement uniforme autour d'un axe fixe, parallèle à OS. Cette condition ne saurait être réalisée exactement dans les expériences, surtout avec l'appareil de M. Sire. Ici, en effet, la rotation d'*entraînement* du système général est produite par une manivelle sur laquelle l'opérateur agit directement, en développant un effort aussi constant que possible pour obtenir une rotation uniforme. Or, les réactions que le tore en mouvement exerce, par ses pivots, sur l'anneau intérieur, et qui se transmettent par celui-ci, à l'anneau extérieur et au grand cercle C, varient périodiquement d'intensité avec les quantités ζ' et φ', comme cela apparaît immédiatement et comme on l'établirait aisément par des calculs convenables. Il en résulte nécessairement que l'effort développé par l'expérimentateur devrait aussi varier périodiquement d'intensité pour maintenir la constance parfaite de la rotation ω, et c'est ce qui n'a jamais lieu. Les conditions de l'expérience ne répondent donc pas d'une manière rigoureuse à l'hypothèse sur laquelle est fondé notre calcul. Pour en approcher d'aussi près que possible, il faudrait supposer au méridien tournant *une masse extrêmement considérable et en quelque sorte infinie* par rapport à celle du gyroscope.

C'est ce qui a lieu quand, au lieu d'être fixé au polytrope, le gyroscope est fixé au globe terrestre. Aussi notre équation différentielle coïncide-t-elle avec celle que M. Lottner a trouvée pour le problème du gyroscope de Foucault, dans les conditions mêmes où nous nous sommes placé dans ce problème IV.

§ VIII.

POLYTROPE DE M. SIRE (*suite*).

33. PROBLÈME V. — *On suppose, dans le polytrope, que l'anneau extérieur* E *soit fixé dans un azimut quelconque relativement au plan* ZOS (fig. 8), *qui est toujours celui du méridien* C; *mais que l'anneau* I *soit libre de tourner autour de son axe* X_1OX_2. *Le disque ayant reçu une rotation initiale* n *autour de son axe de figure* Oζ *maintenu immobile relativement au méridien, on demande de trouver son mouvement.*

Fig. 8.

L'axe du tore ne peut se mouvoir que dans un plan ZOH, fixe par rapport au système de comparaison. Les mêmes notations étant conservées, les conditions du problème nous donnent

$$\psi = const. = \psi_0, \quad \psi' = 0,$$

d'où

$$\cos\gamma = \cos\lambda\cos\psi_0, \quad \cos\gamma_1 = \sin\lambda\sin\theta - \cos\lambda\cos\theta\sin\psi_0,$$
$$\cos\gamma_2 = \sin\lambda\cos\theta + \cos\lambda\sin\theta\sin\psi_0;$$

cos γ est donc constant. La formule (56) devient

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\left[a(\theta' + \omega\cos\gamma)^2 + b\omega^2\cos^2\gamma_1 + C(\varphi' + \omega\cos\gamma_2)^2\right] + termes\ const.,$$

et par suite, si dans l'équation (2) nous prenons $q = \varphi$, $q = \theta$, nous aurons

$$\frac{d}{dt}C(\varphi' + \omega\cos\gamma_2) = 0,$$

$$a\frac{d\theta'}{dt} - \tfrac{1}{2}b\omega^2\frac{d\cos^2\gamma_1}{d\theta} - C(\varphi' + \omega\cos\gamma_2)\omega\frac{d.\cos\gamma_2}{d\theta} = 0,$$

d'où successivement, l_1 étant une constante,

$$(72) \quad \ldots \quad \varphi' + \omega \cos \gamma_2 = l_1,$$

$$a \frac{d\theta'}{dt} - \tfrac{1}{2} b\omega^2 \frac{d.\cos^2 \gamma_1}{d\theta} - Cl_1 \omega \frac{d.\cos \gamma_2}{d\theta} = 0.$$

Mais les relations

$$\cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_2 = 1 - \cos^2 \gamma = const.,$$

$$\frac{d.\cos \gamma_2}{d\theta} = - \sin \lambda \sin \theta + \cos \lambda \cos \theta \sin \psi_0 = - \cos \gamma_1,$$

permettent d'écrire encore la seconde équation sous les formes suivantes :

$$(73) \quad \ldots \quad a \frac{d\theta'}{dt} + \tfrac{1}{2} b\omega^2 \frac{d.\cos^2 \gamma_2}{d\theta} - Cl_1 \omega \frac{d.\cos \gamma_2}{d\theta} = 0,$$

$$(73') \quad \ldots \quad a \frac{d\theta'}{dt} - b\omega^2 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + Cl_1 \omega \cos \gamma_1 = 0.$$

La seconde va nous servir à déterminer les positions d'équilibre apparent de l'axe $O\zeta$ dans son plan directeur ZOH. θ'_0 étant supposé nul, il faut et il suffit, pour cet équilibre, que $\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)_0$ le soit aussi. D'où la condition

$$\omega \cos \gamma_{10} (Cl_1 - b\omega \cos \gamma_{20}) = 0,$$

γ_{10}, γ_{20} désignant les valeurs initiales de γ_1 et de γ_2. Mais si nous continuons à appeler n la vitesse initiale de rotation du tore, nous aurons

$$l_1 = n + \omega \cos \gamma_{20},$$

et l'équation d'équilibre prendra la forme

$$(74) \quad \ldots \quad \cos \gamma_{10} \left[Cn + (C - b) \omega \cos \gamma_{20} \right] = 0$$

On satisfait à cette équation 1° en posant

$$\cos \gamma_{10} = 0.$$

La droite OY_1, perpendiculaire au plan $X_1O\zeta$, doit donc être aussi perpendiculaire à OS, donc OS sera dans le plan $X_1O\zeta$ à l'instant $t = 0$. Mais comme le plan $X_1O\zeta$ est normal au plan directeur ZOH (fig. 9), il s'ensuit que la position initiale de l'axe $O\zeta$ du tore devra coïncider avec la projection OS_1 de OS sur le plan directeur ZOH, ou avec son prolongement. Ainsi,

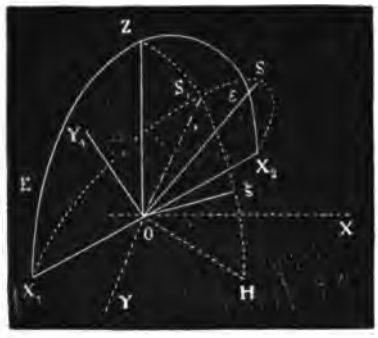


Fig. 9.

Lorsque le plan X_1OZ *de l'anneau extérieur est fixé dans un azimut quelconque, de façon que l'axe* $O\zeta$ *du tore ne puisse se mouvoir que dans un plan* ZOH *normal à* X_1OZ, *si cet axe est dirigé primitivement suivant la projection de* OS *sur le plan directeur, dans un sens ou dans l'autre, il y restera en équilibre apparent.*

Nous verrons plus loin dans quels cas cet équilibre est stable.

2° On peut encore vérifier l'équation (74) en posant

$$Cn + (C - b)\,\omega \cos \gamma_{20} = 0,$$

ou

$$\cos \gamma_{20} = \frac{Cn}{(b - C)\,\omega} = -\frac{Cn}{\left[(C - A) - (C_1 - A_1)\right]\omega}.$$

Ces positions d'équilibre, qui répondent à des valeurs égales de cos γ_{20} et, par suite, à des directions également écartées de part et d'autre de OS_1, ne peuvent exister que lorsque les vitesses rotatoires n et ω sont des quantités de même ordre de grandeur. Elles ne se présenteront donc jamais dans les expériences gyroscopiques ordinaires où n est toujours très grand par rapport à ω. L'angle γ_2, en effet, admet un minimum, savoir, précisément l'angle

$$SOS_1 = \varepsilon$$

compris entre OS et sa projection. Or on a, comme on le voit sans peine,

$$\cos\varepsilon = \sqrt{1 - \cos^2\lambda\cos^2\psi_0};$$

la condition pour que ces deux dernières positions d'équilibre existent est donc que l'on ait

$$\frac{Cn}{(b-C)\omega} \geq \sqrt{1 - \cos^2\lambda\cos^2\psi_0}.$$

Si, au contraire, on se donne à volonté l'angle γ_{20}, on pourra toujours déterminer n de façon que θ reste constant.

On aura pour cela l'équation

$$n = \frac{(b-C)\,\omega\cos\gamma_{20}}{C}.$$

Lorsque $b - C$ est nul, ou quand on a la relation

$$C - A = C_1 - A_1,$$

l'axe du tore reste en équilibre dans toutes les directions initiales pour une vitesse rotatoire n égale à zéro.

Nous avons déjà trouvé un cas analogue dans le second problème.

34. Étudions actuellement le mouvement du tore, lorsque les données initiales ne satisfont pas à l'équation (74).

L'équation (73) s'intègre immédiatement et donne, l_2 étant une constante,

$$a\frac{d\theta^2}{dt^2} = l_2 + 2Cl_1\omega\cos\gamma_2 - b\omega^2\cos^2\gamma_2.$$

Pour déduire plus aisément les conséquences de cette équation, désignons par ζ l'angle que fait l'axe $O\zeta$ du tore avec la

projection OS_1, ζ étant compté positivement dans le même sens que θ. Nous aurons évidemment

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\zeta}{dt},$$

$$\cos\gamma_2 = \cos\varepsilon\cos\zeta, \qquad l_1 = n + \omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0,$$

et l'équation ci-dessus deviendra

$$a\frac{d\zeta^2}{dt^2} = l_2 + 2Cl_1\omega\cos\varepsilon\cos\zeta - b\omega^2\cos^2\varepsilon\cos^2\zeta,$$

ou, si l'on détermine l_2 par la condition $\zeta'_0 = 0$,

$$(75)\quad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{2Cl_1\omega\cos\varepsilon}{a}(\cos\zeta - \cos\zeta_0) - \frac{b\omega^2\cos^2\varepsilon}{a}(\cos^2\zeta - \cos^2\zeta_0).$$

Cette équation, qui définit l'angle ζ et par conséquent la position de l'axe du tore dans le plan directeur par rapport à OS_1, s'identifie avec l'équation (11) du pendule simple à plan tournant, pourvu que l'on pose

$$\omega'^2 = \frac{b\omega^2\cos^2\varepsilon}{a}, \qquad \frac{g}{r} = \frac{Cl_1\omega\cos\varepsilon}{a},$$

c'est-à-dire

$$(76)\quad \begin{cases} \omega' = \omega\cos\varepsilon\sqrt{\dfrac{A + C_1 - A_1}{A + A_1}}, \\ r = \dfrac{ga}{Cl_1\omega\cos\varepsilon} = \dfrac{g(A + A_1)}{C\omega\cos\varepsilon(n + \omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0)}. \end{cases}$$

De là ce théorème remarquable, qui ramène de nouveau le problème proposé à une question résolue complètement :

L'anneau extérieur du gyroscope étant fixé dans un azimut

quelconque autour de OZ, *de sorte que l'axe du tore ne puisse se mouvoir que dans un plan fixe passant par* OZ, *cet axe oscillera, par rapport à la projection sur le plan directeur de la parallèle* OS *à l'axe de rotation du méridien, suivant la même loi qu'un pendule simple de longueur* r, *dont le plan tournerait autour de la verticale avec une vitesse angulaire constante* ω', *les valeurs de* r *et de* ω' *étant déterminées par les équations* (76).

Il suffira donc, dans les formules des §§ II et III, de faire les substitutions indiquées par les équations (76). On aura d'abord à distinguer les cas dans lesquels r est positif de ceux où r est négatif, c'est-à-dire les cas

$$\text{A)} \quad n + \omega \cos\varepsilon \cos\zeta_0 > 0,$$
$$\text{B)} \quad n + \omega \cos\varepsilon \cos\zeta_0 < 0,$$
$$\text{C)} \quad n + \omega \cos\varepsilon \cos\zeta_0 = 0.$$

Le premier cas correspond directement aux formules du mouvement du pendule à plan d'oscillation tournant; la quantité désignée par f est ici

$$f = \frac{2Cl_1}{b\omega\cos\varepsilon} - \cos\zeta_0 = \frac{2Cn + (2C - b)\,\omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0}{b\omega\cos\varepsilon},$$

et il y faut encore distinguer les trois cas

$$f - \cos\zeta_0 > 0, \quad = 0, \quad < 0,$$

ou, ce qui est la même chose, b, ω et $\cos\varepsilon$ étant d'ordinaire positifs,

$$\text{I)} \quad Cn + (C - b)\,\omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0 > 0,$$
$$\text{II)} \quad Cn + (C - b)\,\omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0 = 0,$$
$$\text{III)} \quad Cn + (C - b)\,\omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0 < 0.$$

Enfin, le cas I) comporte lui-même trois hypothèses :

$$f \gtrless 1,$$

ou

$$a) \qquad n < \frac{b - (2C - b)\cos\zeta_0}{2C}\,\omega\cos\varepsilon,$$

$$b) \qquad n = \frac{b - (2C - b)\cos\zeta_0}{2C}\,\omega\cos\varepsilon,$$

$$c) \qquad n > \frac{b - (2C - b)\cos\zeta_0}{2C}\,\omega\cos\varepsilon.$$

Dans le cas I, a), l'axe du gyroscope oscille en restant toujours du même côté de OS_1, l'angle ζ varie entre ζ_0 et ζ_1, ce dernier angle étant défini par l'équation

$$\cos\zeta_1 = f.$$

L'angle ζ s'exprime en fonction explicite du temps par les formules (19) et (21) du n° 9, dans lesquelles on substituera

$$\alpha = \frac{\zeta_0 + \zeta_1}{2}, \quad \beta = \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{2}, \quad k = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

$$\rho = \omega\cos\varepsilon\sin\alpha\sqrt{\frac{b}{a}} = \omega\sqrt{\mu}\cos\varepsilon\sin\alpha.$$

La durée totale de l'oscillation sera

$$\frac{4K}{\omega\sqrt{\mu}\cos\varepsilon\sin\alpha}.$$

Dans le cas I, c), l'axe oscillera symétriquement de part et d'autre de OS_1, entre les valeurs ζ_0 et $-\zeta_0$ de ζ (c'est le cas des expériences de M. Sire). Le mouvement de l'axe dans son plan directeur sera représenté par les formules (29), où l'on devra faire

$$\alpha = \frac{\zeta_0}{2}, \quad \sin\beta = \sin\alpha\sqrt{\frac{b\omega\cos\varepsilon}{Cn + (C - b)\,\omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0}},$$

$$k = \frac{1 - \cos\alpha\cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}, \quad \rho = \frac{\omega\sqrt{\mu}\cos\varepsilon\sin\alpha}{\sin\beta}(1 + \cos\alpha\cos\beta).$$

La durée totale d'une oscillation sera

$$\frac{8K \sin \beta}{\omega \sqrt{\mu} \cos \varepsilon \sin \alpha (1 + \cos \alpha \cos \beta)}.$$

Le cas II) est le deuxième cas d'équilibre discuté au n° 33.

Enfin, dans le cas III), on fera usage des formules du n° 13, [(32), (33), etc.....], avec les substitutions

$$\cos \zeta_1 = f, \quad \alpha = \frac{\zeta_0 + \zeta_1}{2}, \quad \beta = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{2},$$

$$k = \frac{\sin \beta}{\sin \alpha}, \quad \rho = \omega \sqrt{\mu} \cos \varepsilon \sin \alpha.$$

L'axe du tore oscillera encore d'un même côté de la projection OS_1, mais ζ_1 sera plus grand que ζ_0; la durée de l'oscillation est donnée par la formule

$$\tau = \frac{4K}{\omega \sqrt{\mu} \cos \varepsilon \sin \alpha}.$$

35. L'hypothèse B), où $n + \omega \cos \varepsilon \cos \zeta_0$ est < 0, donne pour la longueur r du pendule de comparaison une valeur négative. Nous savons déjà que cette circonstance répond à un renversement dans la direction de la pesanteur, c'est-à-dire qu'il faudra, dans les équations précédentes, remplacer la droite OS_1 par son prolongement ou ζ par $\pi - \zeta$. On retrouvera donc les mêmes formules et les mêmes conséquences.

Reste le cas C) où $n + \omega \cos \varepsilon \cos \zeta_0 = 0$, qui correspond dans le deuxième problème au cas traité au n° 19.

L'axe du tore exécutera des oscillations d'égale amplitude de part et d'autre d'une perpendiculaire à OS_1 dans le plan directeur, et la loi de ses oscillations sera donnée par les formules (45) et (46), dans lesquelles on remplacera seulement ω par $\omega \cos \varepsilon$. La durée d'une oscillation sera

$$\frac{4K}{\omega \sqrt{\mu} \cos \varepsilon}.$$

26. Le mouvement d'oscillation de l'axe du tore étant ainsi parfaitement déterminé, il nous reste à connaître la loi de la rotation du tore, ou à trouver l'expression de l'angle φ, ce qui se fera encore par des formules semblables à celles du problème II. L'équation (72) nous donne

$$\frac{d\varphi}{dt} = l_1 - \omega \cos\gamma_2 = n - \omega \cos\varepsilon\,(\cos\zeta - \cos\zeta_0),$$

d'où nous tirerons, en intégrant et posant

$$\rho t + \mathrm{K} = u,$$

$$\varphi = \varphi_0 + nt - \frac{\omega\cos\varepsilon}{\rho}\int_{\mathrm{K}}^{u}(\cos\zeta - \cos\zeta_0)\,du.$$

Cette équation ne diffère de l'équation (47), relative au problème II, que par la substitution de $\omega\cos\varepsilon$ à ω. En outre, l'expression de ρ, dans les différents cas qui se correspondent dans le problème II et dans le problème actuel, ne diffère également que par cette substitution, ainsi qu'il est facile de le voir en comparant les formules des n^os^ 17 et 18 avec celles du n° 34. Il en résulte que les formules finales, pour la rotation du tore, s'obtiendront en faisant ce simple changement de ω en $\omega\cos\varepsilon$ dans les équations (50), (52), (53), (54). Nous aurons donc 1° pour le cas I, a),

$$\varphi = \varphi_0 + (n - \omega\cos\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\beta\sin\zeta_0)\,t + \frac{1}{\sqrt{\mu}}\frac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)}\rho t$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\mu}}\,\mathrm{l.}\left[\frac{\theta_3(\rho t + \sigma)}{\theta_3(\rho t - \sigma)}\,\frac{1 + \sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}{1 - \sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}\right],$$

les valeurs de α, β, ρ étant celles qui se rapportent au cas I, a) et celle de σ étant donnée par l'équation

$$\mathrm{sn}\,\sigma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta};$$

2° Pour le cas I, *c*),

$$\varphi = \varphi_0 + \left(n - \frac{\omega \sin\alpha \sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta}\right) t \mp \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)} \rho t$$
$$- \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \text{l.} \left[\frac{\theta_3(\rho t \mp \sigma)}{\theta_3(\rho t \pm \sigma)} \cdot \frac{1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \,\text{sn}\,\rho t}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \,\text{sn}\,\rho t}\right],$$

et les valeurs de α, β, k, ρ seront celles qui se rapportent au cas I, *c*) du n° 34; σ sera le plus petit argument positif qui vérifie l'équation

$$k \,\text{sn}\,\sigma = \pm \text{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} \text{tg}\frac{\alpha + \beta}{2};$$

3° Pour le cas III), nous aurons

$$\varphi = \varphi_0 + (n + \omega\cos\varepsilon \,\text{tg}\,\beta \sin\zeta_0)\, t + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)} \rho t$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \text{l.} \left[\frac{\theta_3(\rho t - \sigma)}{\theta_3(\rho t + \sigma)} \cdot \frac{1 - \sin\beta \,\text{sn}\,\rho t}{1 + \sin\beta \,\text{sn}\,\rho t}\right],$$

avec substitution des valeurs de α, β, ρ, σ qui conviennent à ce cas;

4° Enfin, pour le cas particulier C), la valeur de φ se réduit, par la relation

$$n + \omega\cos\varepsilon\cos\zeta_0 = 0,$$

à

$$\varphi = \varphi_0 - \frac{\omega\cos\varepsilon}{\rho} \int_K^u \cos\zeta \, du,$$

et en posant

$$\rho = \omega\sqrt{\mu}\cos\varepsilon,$$

et remplaçant $\cos\zeta$ par sa valeur correspondant à ce cas, on trouvera

$$\varphi = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \text{l.} \frac{1 - \cos\zeta_0 \,\text{sn}\,(\omega t\sqrt{\mu}\cos\varepsilon)}{1 + \cos\zeta_0 \,\text{sn}\,(\omega t\sqrt{\mu}\cos\varepsilon)}.$$

Dans ce dernier cas, il n'y a plus de terme proportionnel au temps dans l'expression de l'angle φ; la rotation du tore autour de son axe de figure s'effectue alternativement dans un sens et dans l'autre.

DEUXIÈME PARTIE

§ IX.

37. Problème VI. — *Déterminer le mouvement d'un point pesant* M *sur un cercle qui tourne, avec une vitesse angulaire constante* ω', *autour d'un axe vertical* ST *situé dans son plan* (fig. 10).

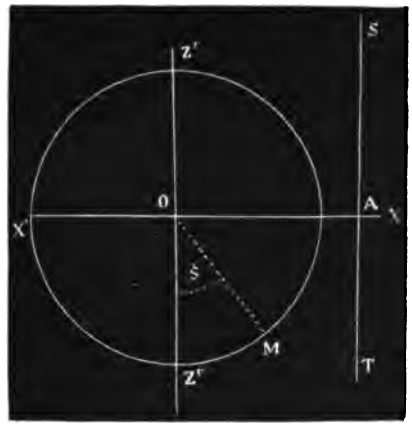


Fig. 10.

Prenons pour système de comparaison la verticale Z'Z passant par le centre du cercle, l'horizontale XOX' qui rencontre ST; soient m la masse du point, r le rayon du cercle, Δ la distance OA de son centre à l'axe ST, ζ l'angle que fait le *pendule* OM, à l'époque t, avec la *nadirale* OZ, cet angle étant compté positivement de OZ vers OX, négativement en sens contraire. Nous ferons encore usage des relations (2), (3), (4), (5) et (6) du § I, et comme le corps se réduit ici à un point, nous écrirons immédiatement

$$T = \tfrac{1}{2} mr^2\zeta'^2, \quad G = \frac{\omega'^2}{2} mr^2 \sin^2\zeta, \quad V = 0,$$

$$U = mgr \cos\zeta.$$

L'accélération J de l'origine mobile O est dirigée suivant OA et égale à $\omega'^2\Delta$, donc

$$N = -m\omega'^2\Delta r \sin\zeta.$$

Nous avons donc

$$T_2 = \tfrac{1}{2} mr^2(\zeta'^2 + \omega'^2 \sin^2\zeta),$$
$$U + N = mr(g\cos\zeta - \omega'^2 \Delta \sin\zeta),$$

et l'équation (2) nous donne, après division par mr^2,

$$(77) \quad \frac{d\zeta'}{dt} = \omega'^2 \sin\zeta\cos\zeta - \frac{g}{r}\sin\zeta - \frac{\omega'^2\Delta}{r}\cos\zeta,$$

pour l'équation différentielle du mouvement.

38. Nous cherchons d'abord les positions d'équilibre relatif du point mobile, ou les valeurs de ζ_0 pour lesquelles $\left(\frac{d\zeta'}{dt}\right)_0$ serait nul. En désignant par E une de ces valeurs, nous tirerons de l'équation (77), pour la déterminer,

$$(78) \quad \omega'^2 \sin E\cos E - \frac{g}{r}\sin E - \frac{\omega'^2\Delta}{r}\cos E = 0.$$

Pour résoudre commodément cette égalité, nous poserons

$$(\alpha) \quad x = \sin E, \quad z = \cos E, \quad \frac{g}{r\omega'^2} = \nu, \quad \frac{\Delta}{r} = \mu,$$

ce qui permettra de remplacer l'équation (78) par ces deux-ci :

$$(\beta) \quad xz - \mu z - \nu x = 0, \quad x^2 + z^2 = 1.$$

On reconnaît les équations qui traduisent ce problème de géométrie : *Par un point* K, *dont les coordonnées sont* μ *et* ν *par rapport à un système rectangulaire* XOX', ZOZ', *mener une droite sur laquelle ces deux axes interceptent une longueur* PQ *égale à l'unité* (fig. 11).

Les inconnues x et z sont respectivement les distances OP, OQ de l'origine aux points où la droite cherchée coupe les axes.

Si donc, dans le plan XOZ du cercle mobile, je construis le

point K par ses coordonnées μ et ν [éq. (α)], et que je trace la droite PQ satisfaisant à la condition indiquée, on voit par les relations

$$x = \sin E,$$
$$z = \cos E,$$

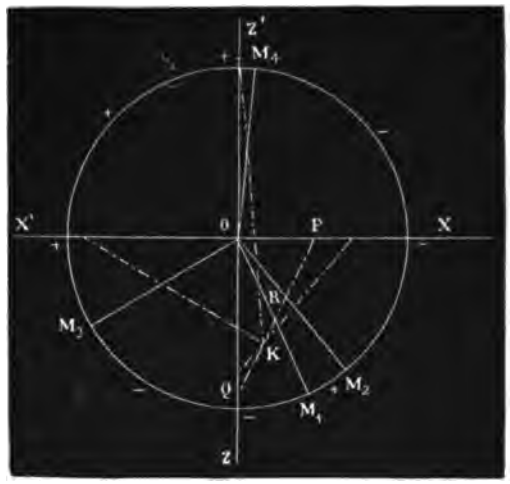


Fig. 11.

que E sera l'angle O Q P. Donc *la droite* OR, *menée du centre* O *au milieu* R *de* PQ, *sera une position d'équilibre du pendule*, puisqu'elle fera avec OZ un angle égal à OQP ou E, vérifiant, par conséquent, l'équation (78). La détermination des positions d'équilibre est donc ramenée à ce problème de géométrie bien connu.

Or, on sait que ce problème admet *quatre* solutions, ou *deux* seulement. Le premier cas est celui où l'on a

$$\mu^{\frac{2}{3}} + \nu^{\frac{2}{3}} < 1,$$

c'est-à-dire où le point K est *dans l'intérieur* de l'épicycloïde qui a pour équation

$$x^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 1.$$

La condition correspondante, dans notre problème de mécanique, sera

$$(79) \quad \ldots\ldots \quad \Delta^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{g}{\omega'^2}\right)^{\frac{2}{3}} < r^{\frac{2}{3}}.$$

Si Δ est plus petit que r, c'est-à-dire si l'axe ST *coupe* le cercle tournant, comme on peut attribuer à la vitesse ω' une

valeur aussi grande qu'on le désire, cette condition (79) pourra toujours être réalisée pour une valeur suffisamment grande de ω'. Il y aura donc alors *quatre positions d'équilibre* du point M sur le cercle mobile. Les coordonnées μ et ν étant positives, le point K est dans l'angle XOZ; il y a dans cet angle deux positions d'équilibre M_1, M_2, construites comme il est dit plus haut (fig. 11); il y en a une troisième M_3 dans l'angle ZOX', une quatrième M_4 dans l'angle XOZ'. L'angle X'OZ' n'en renferme évidemment aucune.

Dans le second cas, celui où l'on a

$$\mu^{\frac{2}{3}} + \nu^{\frac{2}{3}} > 1,$$

ou

$$\Delta^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{g}{\omega'^2}\right)^{\frac{2}{3}} > r^{\frac{2}{3}}, \tag{80}$$

il n'existe plus que *deux positions d'équilibre*, M_3 et M_4, les deux premières, dans l'angle XOZ, disparaissant. On a, comme cas-limite des deux précédents,

$$\Delta^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{g}{\omega'^2}\right)^{\frac{2}{3}} = r^{\frac{2}{3}},$$

le point K est sur l'épicycloïde, les points M_1 et M_2 se confondent en un seul, et le mobile *m* admet *trois positions d'équilibre*.

On remarquera aussi le cas particulier où l'on aurait

$$\Delta = 0,$$

qui nous ramène au problème du n° 4, l'axe ST passant par le centre du cercle. Il est facile de voir que l'on retrouverait, comme cas particulier de la construction ci-dessus, la solution que nous avons donnée pour la détermination des positions d'équilibre du mobile dans ce cas.

29. Pour reconnaître, dans le cas où a lieu l'inégalité (79), quelles sont, parmi les quatre positions d'équilibre, celles qui

appartiennent à l'équilibre stable, on observera que, en vertu de l'équation (77), le signe de $\frac{d\zeta'}{dt}$ est toujours le même que celui du second membre de cette équation, lequel, étant une fonction continue de ζ, ne peut changer de signe que pour les valeurs de ζ qui annulent ce second membre, c'est-à-dire, qui sont égales à l'une des valeurs de E, racines de l'équation (78). Donc, $\frac{d\zeta'}{dt}$ ne peut changer de signe que lorsque le point mobile atteint l'une des positions M_1, M_2, M_3, M_4. D'autre part, si la vitesse initiale est nulle ($\zeta' = 0$ pour $t = 0$), le signe de $\frac{d\zeta'}{dt}$, aussi longtemps qu'il ne change pas, détermine celui de ζ', et, par suite, le sens dans lequel le mobile se meut. Il suffit donc, pour trouver dans quel sens se déplacera le point M quand sa position initiale sera sur l'un des arcs M_1M_2, M_2M_4, etc., de connaître le signe de la fonction

$$\omega'^2 \sin\zeta\cos\zeta - \frac{g}{r}\sin\zeta - \frac{\omega'^2\Delta}{r}\cos\zeta$$

en un point déterminé de chacun de ces arcs. Or, sur l'axe OZ, on a $\zeta = 0$, la fonction est *négative*; sur OZ', où $\zeta = \pi$, la fonction est *positive* (fig. 11). Sur les axes OX et OX', on a respectivement

$$\zeta = \frac{\pi}{2}, \quad \zeta = -\frac{\pi}{2},$$

la fonction prend le signe — et le signe +. On en conclut immédiatement que $\frac{d\zeta'}{dt}$ sera toujours positif dans l'angle M_1OM_2, négatif dans l'angle M_2OM_4, positif dans l'angle M_4OM_3, négatif dans l'angle M_3OM_1, et, enfin, que M_2 *et* M_3 *sont les positions d'équilibre stable,* M_1 *et* M_4 *les positions d'équilibre instable.*

Quand on est dans le cas de l'inégalité (80), les positions M_1 et M_2 disparaissent; il reste la position d'équilibre stable M_3 et la position d'équilibre instable M_4.

Une discussion, fondée sur d'autres méthodes, conduit aux mêmes conclusions pour la répartition des positions d'équilibre.

40. Il faut maintenant intégrer l'équation (7). Multipliant

par $2d\zeta$ et désignant par l_2 une constante arbitraire, on tire de cette équation, en intégrant,

$$(81) \qquad \frac{d\zeta^2}{dt^2} = l_2 + \omega'^2 \sin^2\zeta + \frac{2g}{r}\cos\zeta - \frac{2\omega'^2\Delta}{r}\sin\zeta,$$

la constante l_2 étant déterminée, dans l'hypothèse $\zeta_0 = 0$, par l'égalité

$$l_2 = -\omega'^2 \sin^2\zeta_0 - \frac{2g}{r}\cos\zeta_0 + \frac{2\omega'^2\Delta}{r}\sin\zeta_0.$$

On tire de l'équation (81)

$$t = \pm \int_{\zeta_0}^{\zeta} \frac{d\zeta}{\sqrt{l_2 + \omega'^2 \sin^2\zeta + \frac{2g}{r}\cos\zeta - \frac{2\omega'^2\Delta}{r}\sin\zeta}}.$$

Si l'on pose

$$\operatorname{tg}\frac{\zeta}{2} = v,$$

d'où

$$\sin\zeta = \frac{2v}{1+v^2}, \quad \cos\zeta = \frac{1-v^2}{1+v^2}, \quad d\zeta = \frac{2dv}{1+v^2};$$

cette équation deviendra

$$t = \pm \int_{v_0}^{v} \frac{2dv}{\sqrt{l_2(1+v^2)^2 + 4\omega'^2 v^2 + \frac{2g}{r}(1-v^4) - \frac{4\omega'^2\Delta}{r}(1+v^2)v}}.$$

Le polynôme sous le radical est du quatrième degré en v, l'intégrale est elliptique. On pourra donc exprimer v et, par suite, ζ en fonction elliptique du temps t; mais cette transformation exigerait une discussion assez compliquée des racines du polynôme en v, ce qui nous entraînerait un peu loin. Nous remar-

querons seulement que l'équation (81) peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \omega'^2(\sin^2\zeta - \sin^2\zeta_0) + \frac{2g}{r}(\cos\zeta - \cos\zeta_0) - \frac{2\omega'^2\Delta}{r}(\sin\zeta - \sin\zeta_0),$$

ou, en posant $\zeta - \zeta_0 = 2\varepsilon$, sous celle-ci :

$$(82)\quad \left\{ \frac{d\varepsilon^2}{dt^2} = \sin\varepsilon\left[\omega'^2\cos\varepsilon\sin(\zeta_0+\varepsilon)\cos(\zeta_0+\varepsilon) - \frac{g}{r}\sin(\zeta_0+\varepsilon) - \frac{\omega'^2\Delta}{r}\cos(\zeta_0+\varepsilon)\right].\right.$$

Sous cette dernière forme, l'équation se prête bien au calcul des petites oscillations du pendule OM lorsqu'il est faiblement écarté d'une de ses positions d'équilibre stable, ε étant alors une très petite quantité dont on peut négliger les puissances supérieures à la première.

Remarque. — Nous terminerons par une observation qui ne manque pas d'importance pour ce qui suivra. Nous avons compté l'angle ζ positivement du côté de la verticale OZ où se trouve l'axe ST de la rotation d'entraînement. Si nous avions compté cet angle positivement du côté opposé, en nous éloignant de l'axe ST, tous les termes de l'équation (77) eussent changé de signe, sauf le dernier; nous aurions donc trouvé le même résultat que si nous eussions changé Δ en $-\Delta$ et continué à compter l'angle ζ positivement dans le sens primitif. Réciproquement, nous conclurons donc de là que toute équation qui ne différerait de (77) que par le signe de Δ, se ramènerait à l'équation (77) en changeant le sens dans lequel on compte positivement les angles ζ (*).

(*) Le problème d'équilibre du n° 38 a été traité par M. Schellbach (*Neue Elemente der Mechanik*) par des considérations élémentaires. Il a reconnu l'existence de quatre positions d'équilibre et les a même calculées numériquement pour des données particulières; mais il n'a aperçu ni la construction géométrique qui met en évidence l'existence de ces quatre positions et permet de les tracer si facilement, ni les conditions pour

§ X.

PENDULE GYROSCOPIQUE DE M. SIRE.

41. PROBLÈME VII. — *Mouvement du pendule gyroscopique de M. Sire.*

Cet appareil, qui est bien connu, consiste en un *pendule* composé d'un tore D (fig. 12) qui a son centre au point A, d'une chape E qui porte l'axe de rotation Aζ du tore, et d'une tige OC qui relie la chape au milieu O d'un axe horizontal *ab*. Cet axe, autour duquel le pendule peut osciller librement, est emporté dans la rotation d'un bâti Σ tournant autour d'un axe vertical ST. Les directions Aζ, OA, *ab* sont perpendiculaires l'une à l'autre. La chape E n'est assujettie qu'à la condition d'être symétrique par rapport au plan vertical OAζ (*plan d'oscillation du pendule*), et au plan *ab*A mené par l'axe de suspension et le centre du tore; le centre de gravité A_1 de la tige et de la chape est donc sur la droite OA, et les droites *ab*,

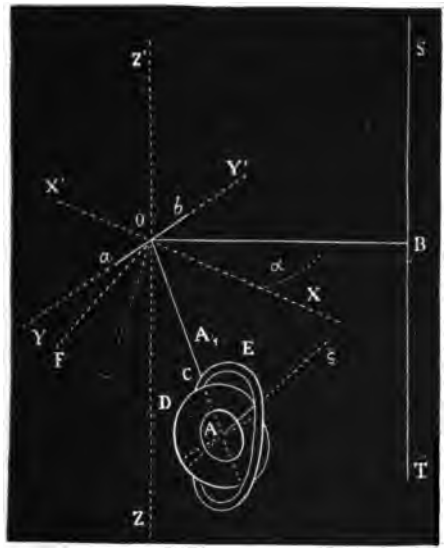


Fig. 12.

qu'elles existent toutes les quatre ou se réduisent à deux. M. Reisky, traitant plus récemment ce problème (*Programm der Realschule von Posen*, 1877), a donné seulement l'équation différentielle du mouvement. Pour le reste, il n'a fait que reproduire la solution de M. Schellbach. Les résultats que je donne ici ont été communiqués au *Congrès de l'Association française*, à Reims, en 1880.

OA, OF (celle-ci parallèle à Aζ) sont les axes principaux d'inertie du pendule relatifs au point O. Par une disposition mécanique convenable, le plan d'oscillation AOF fait avec le plan OBS, passant par le point O et l'axe ST (*plan méridien*), un angle α que l'on peut faire varier dans chaque expérience.

La vitesse de rotation ω du bâti autour de ST étant supposée constante, et *positive* ou de gauche à droite par rapport à BS, le tore étant animé d'une rotation initiale n autour de son axe Aζ, il faut déterminer le mouvement relatif du pendule par rapport au bâti tournant.

Soient Z'OZ la verticale du point O vers le bas; X'OX l'horizontale menée dans le plan d'oscillation, OX étant pris dans un sens tel que l'angle $BOX = \alpha$, compté positivement de gauche à droite autour de OZ', soit compris entre 0° et 180°; OY normal à OX, OZ, donc, normal au plan d'oscillation et coïncidant avec la direction *ba*. OXYZ sera le système de comparaison.

Nommons δ la distance OB du centre de suspension à l'axe ST; m, m_1 les masses du tore et de la chape avec sa tige, $a = OA$, $a_1 = OA_1$ les distances de leurs centres de gravité respectifs au point O; C et A les moments d'inertie axial et équatorial du tore; A_1, B_1, C_1 ceux de la chape par rapport à ses axes principaux relatifs au centre de gravité A_1, axes respectivement parallèles à OY, OA, OF; H_1, H_2, H_3 les moments d'inertie du pendule complet par rapport à ces derniers axes; ζ l'angle ZOA du pendule avec la verticale OZ, compté positivement de OZ vers OX; φ l'angle qui mesure la rotation du tore relativement à la chape. Nous avons, par des formules connues,

$$(83)\quad \left\{\begin{aligned} M &= m + m_1,\\ M\rho &= ma + m_1a_1,\\ H_1 &= ma^2 + m_1a_1^2 + A + A_1,\\ H_2 &= A + B_1,\\ H_3 &= ma^2 + m_1a_1^2 + C + C_1. \end{aligned}\right.$$

Pour appliquer nos équations fondamentales (n^os^ 1 et 2),

observons que le mouvement du tore autour de son centre de gravité A se compose d'une rotation φ' autour de l'axe principal $A\zeta$ et d'une rotation $-\zeta'$ autour d'un axe parallèle à OY, en sorte que la force vive relative du tore est

$$ma^2\zeta'^2 + C\varphi'^2 + A\zeta'^2;$$

celle de la chape, qui n'a qu'une rotation $-\zeta'$ autour de OY,

$$m_1a_1^2\zeta'^2 + A_1\zeta'^2,$$

en sorte que pour le pendule entier l'on a

$$T = \tfrac{1}{2}(H_1\zeta'^2 + C\varphi'^2).$$

Le moment d'inertie du pendule total par rapport à OZ' a pour expression $H_2\cos^2\zeta + H_3\sin^2\zeta$; donc

$$G = \frac{\omega^2}{2}\left[H_2 + (H_3 - H_2)\sin^2\zeta\right].$$

Enfin, les quantités de mouvement dues à la rotation du pendule autour de OY (axe principal relatif au point O) donnent un couple dont l'axe OY est normal à l'axe OZ' de la rotation d'entraînement, donc V est nul pour ces quantités de mouvement. Il ne reste donc que la projection sur OZ' de l'axe d'impulsion dû à la rotation du tore autour de $A\zeta$, axe dirigé suivant $A\zeta$, ayant pour valeur $C\varphi'$, et faisant avec OZ' l'angle $\frac{\pi}{2} - \zeta$; donc

$$V = C\omega\varphi'\sin\zeta.$$

La seule force motrice étant la pesanteur, on a

$$U = Mg\rho\cos\zeta;$$

enfin, l'accélération J de l'origine mobile est dirigée suivant OB et égale à $\omega^2\delta$; donc, d'après l'équation (3),

$$N = -M\omega^2\delta\rho\cos\alpha\sin\zeta,$$

de sorte que l'on a définitivement

$$T_2 = \tfrac{1}{2}(H_1\zeta'^2 + C\varphi'^2) + C\omega\varphi' \sin\zeta + \frac{\omega^2}{2}\left[H_2 + (H_3 - H_2)\sin^2\zeta\right],$$

$$U + N = M\rho\,(g\cos\zeta - \omega^2\delta\cos\alpha\sin\zeta).$$

On appliquera l'équation (2), en prenant successivement $q = \varphi$, $q = \zeta$, et l'on trouvera d'abord

$$C\frac{d}{dt}(\varphi' + \omega\sin\zeta) = 0,$$

ou, l_1 désignant une constante dont la valeur sera $n + \omega\sin\zeta_0$,

$$(84) \quad \ldots\ldots\ldots \varphi' + \omega\sin\zeta = l_1.$$

Puis, pour $q = \zeta$,

$$H_1\frac{d\zeta'}{dt} - C\omega\varphi'\cos\zeta - \omega^2(H_3 - H_2)\sin\zeta\cos\zeta = -M\rho\,(g\sin\zeta + \omega^2\delta\cos\alpha\cos\zeta),$$

ou, en remplaçant φ' par sa valeur tirée de (84) et divisant par H_1,

$$(85) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\zeta'}{dt} = \dfrac{H_3 - H_2 - C}{H_1}\omega^2\sin\zeta\cos\zeta - \dfrac{Mg\rho}{H_1}\sin\zeta \\ \qquad - \dfrac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cl_1}{H_1}\omega\cos\zeta. \end{array}\right.$$

Telle est l'équation du second ordre qui définit ζ en fonction du temps et fait connaître le mouvement d'oscillation du pendule dans le plan XOZ.

42. La condition nécessaire et suffisante pour que le pendule reste en équilibre relatif, ζ_0' étant supposé nul, c'est que le second membre de l'équation (85) se réduise à zéro à l'instant $t = 0$.

ou pour $\zeta = \zeta_0$. Nous aurons donc, en désignant par E l'une des valeurs de ζ_0 pour lesquelles l'équilibre a lieu, et en ayant égard à la valeur de l_1,

$$\frac{H_3 - H_2}{H_1}\omega^2 \sin E \cos E - \frac{Mg\rho}{H_1}\sin E - \frac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cn}{H_1}\omega\cos E = 0.$$

Or, nous identifierons cette équation avec l'équation (78), si nous posons

$$\frac{H_3 - H_2}{H_1}\omega^2 = \omega'^2, \qquad \frac{M\rho}{H_1} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cn}{H_1}\omega = \frac{\omega'^2\Delta}{r},$$

ce qui nous conduira aux valeurs suivantes de ω', r, Δ :

$$(86)\ \ldots\ \begin{cases} \omega' = \omega\sqrt{\dfrac{H_3 - H_2}{H_1}}, \\ r = \dfrac{H_1}{M\rho}, \\ \Delta = \dfrac{H_1}{H_3 - H_2}\,\dfrac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cn}{M\omega\rho}. \end{cases}$$

Ainsi, les conditions d'équilibre du tore-pendule de M. Sire se ramènent à celles d'un point pesant sur un cercle tournant autour d'un axe vertical situé dans son plan, conditions que nous avons discutées aux n^{os} 38 et 39. Il suffit, par conséquent, d'appliquer ici les résultats de cette discussion, pour pouvoir énoncer les propriétés suivantes :

Que l'on prenne, dans le plan d'oscillation, un point K *ayant pour coordonnées, par rapport à* OX *et* OZ,

$$\mu = \frac{\Delta}{r} = \frac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cn}{(H_3 - H_2)\omega},$$

$$\nu = \frac{g}{r\omega'^2} = \frac{Mg\rho}{(H_3 - H_2)\omega^2};$$

par ce point K, *que l'on mène une droite telle que les axes* XOX', ZOZ' *interceptent sur elle une longueur* PQ *égale à l'unité; la droite* OR *menée du point* O *au milieu* R *de cette droite* PQ *sera une position d'équilibre de l'axe* OA *du pendule gyroscopique. Ces positions seront au nombre de quatre si l'on a l'inégalité*

$$(87). \quad . \quad (M\omega\partial\rho\cos\alpha - Cn)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Mg\rho}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}} < (H_3 - H_2)^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{2}{3}},$$

de deux seulement si l'on a, au contraire,

$$(87'). \quad . \quad (M\omega\partial\rho\cos\alpha - Cn)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{Mg\rho}{\omega}\right)^{\frac{2}{3}} > (H_3 - H_2)^{\frac{2}{3}}\omega^{\frac{2}{3}}.$$

On remarquera que la longueur r du pendule de comparaison, telle qu'elle résulte de la deuxième des formules (86), est précisément égale à la longueur du pendule composé, formé du tore et de la chape, autour de l'axe horizontal *ab*.

43. Examinons d'abord le cas où l'inégalité (87) est vérifiée. Des quatre positions d'équilibre relatif du pendule, deux appartiennent à l'équilibre stable, deux à l'équilibre instable, et leur distinction se fait d'après le signe de $\frac{d\zeta'}{dt}$ dans l'équation (85), exactement comme au n° 39.

Dans les conditions ordinaires de construction de l'appareil, on a

$$H_3 - H_2 = ma^2 + m_1a_1^2 + C - A + C_1 - B_1 > 0,$$

donc ν est positif. Le signe de μ dépend du signe de $M\omega\partial\rho\cos\alpha - Cn$.

1° Supposons que ce signe soit d'abord positif, ce qui revient à la condition

$$\frac{n}{\omega} < \frac{M\partial\rho\cos\alpha}{C}.$$

Cette condition peut toujours être réalisée, puisque rien ne limite les valeurs que peut atteindre le rapport $\frac{n}{\omega}$; elle est toujours vérifiée, lorsque l'on a

$$n < 0, \qquad \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

Dans ce cas, le point K est dans l'angle XOZ (fig. 13); il y a dans cet angle *deux* positions d'équilibre, l'une d'équilibre instable OM_1, plus rapprochée de la verticale OZ, l'autre d'équilibre stable OM_2, plus rapprochée de OX. Dans l'angle X'OZ compris entre la nadirale OZ et le prolongement de OX, il y a une deuxième position d'équilibre stable OM_3; dans l'angle Z'OX, entre la zénithale OZ' et OX, il y a une deuxième position d'équilibre instable OM_4:

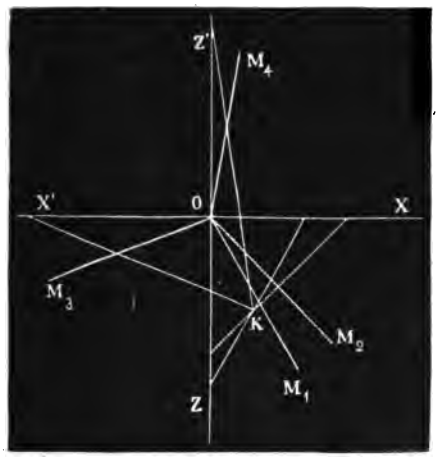


Fig. 13.

2° Supposons, en second lieu,

$$\frac{n}{\omega} > \frac{M\delta\rho\cos\alpha}{C}$$

ou $\mu < 0$. Le point K passe dans l'angle X'OZ (fig. 14); il y a dans cet angle deux positions d'équilibre, l'une instable OM_4, l'autre stable OM_2. L'angle XOZ renferme une deuxième position d'équilibre stable OM_3, l'angle X'OZ' une deuxième position d'équilibre instable OM_4.

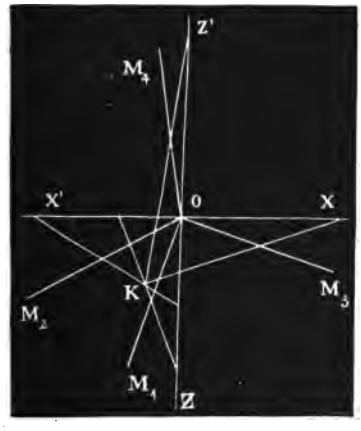


Fig. 14.

Au reste, ce second cas se ramènerait au premier en observant que les équations (86) donnent pour Δ une valeur négative, ce qui revient, comme on l'a vu, à compter l'angle ζ positivement en sens contraire à partir de OZ, c'est-à-dire de OZ vers OX'. Les positions d'équilibre du

pendule occupent donc, relativement à la verticale OZ, des situations symétriques de celles qui se rapportent au cas précédent.

3° Reste une hypothèse intermédiaire, celle où l'on aurait

$$M\omega\delta_0 \cos\alpha - Cn = 0$$

L'équation d'équilibre du pendule gyroscopique se réduit à

$$\sin E\left[\cos E - \frac{Mg\rho}{(H_3 - H_2)\omega^2}\right] = 0.$$

La relation

$$\sin E = 0$$

indique deux positions d'équilibre verticales, OM_1 et OM_4 (fig. 15), toutes deux d'équilibre instable.

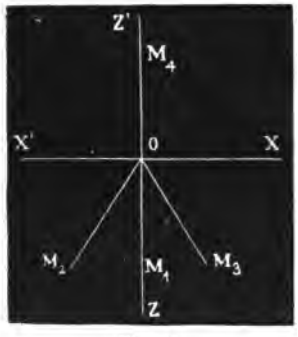


Fig. 15.

La supposition

$$\cos E = -\frac{Mg\rho}{(H_3 - H_2)\omega^2}$$

correspond [la condition (87) étant d'ailleurs supposée remplie] à deux positions d'équilibre *stable* OM_2 et OM_3, également inclinées de part et d'autre sur la verticale OZ. Au reste, ce cas particulier correspond à $\Delta = 0$ dans les équations (86) et nous ramène, par conséquent, au problème discuté dans les paragraphes II et III. La condition est réalisée, par exemple, lorsque l'on suppose

$$n = 0 \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire le tore sans rotation initiale et le plan d'oscillation XOZ à angle droit sur le plan *méridien* OBS, en admettant d'ailleurs que ω ait une valeur assez grande pour que l'inégalité (87) subsiste.

44. Considérons actuellement l'hypothèse (87′). Les deux positions d'équilibre du pendule situées dans l'angle des axes XX′, ZZ′ où se trouve le point K, disparaissent; il ne reste plus qu'une position d'équilibre stable OM_3, faisant un angle aigu avec la nadirale OZ, et une position d'équilibre instable OM_4, faisant un angle aigu avec la zénithale OZ′. La position d'équilibre stable OM_3 est dans l'angle X′OZ ou dans l'angle XOZ, selon que l'on a

$$M\omega\partial\rho\cos\alpha - Cn \gtrless 0,$$

ce qui dépend des signes de n et de $\cos\alpha$ et de la valeur du rapport $\frac{n}{\omega}$.

Dans les expériences de M. Sire, le tore recevait une vive rotation autour de son axe; n avait donc une valeur très considérable relativement à ω. Il en résulte nécessairement :

1° Que l'on se trouve alors dans le cas de l'inégalité (87′); que, par suite, le nombre des positions d'équilibre se réduit à *deux*, l'une d'équilibre *stable* OM_3, au-dessous de l'horizontale XOX′; l'autre d'équilibre *instable* OM_4, au-dessus de XOX′.

2° Que, à raison de la valeur considérable du rapport $\frac{n}{\omega}$, l'expression $M\omega\partial\rho\cos\alpha - Cn$ a le même signe que son second terme, et, par suite, un signe contraire à celui de n. Donc, si n est positif, *c'est-à-dire si la rotation initiale du tore est de gauche à droite par rapport à la partie* $A\zeta$ *de l'axe du tore qui fait un angle aigu avec* OX, *la position d'équilibre stable du pendule* OA *sera dans l'angle* XOZ, ou fera aussi un angle aigu avec l'axe OX défini précédemment. Si, au contraire, n est négatif, ou *si le tore tourne d'abord de droite à gauche autour de* $A\zeta$, *l'équilibre stable aura lieu dans l'angle* X′OZ.

3° Enfin, si la valeur absolue de n est incomparablement plus grande que celle de ω, ce qui a lieu lorsqu'on a imprimé au tore une rotation excessivement rapide, on voit facilement que l'équation en E ne peut être vérifiée (ω n'étant toutefois pas supposé nul) que pour des valeurs de cos E très voisines de zéro. Donc, l'angle E qui détermine la position d'équilibre stable sera

très voisin de $\frac{\pi}{2}$ si n est positif, de $-\frac{\pi}{2}$ si n est négatif. La construction géométrique conduit au même résultat.

En résumé, *le pendule tendra à se mettre en équilibre relatif dans une position très voisine de l'horizontale, en arrière ou en avant du plan méridien, relativement au sens de la rotation du bâti autour de* ST, *suivant que la rotation initiale du tore se fera de gauche à droite ou de droite à gauche par rapport à l'axe* Aζ *défini ci-dessus.*

Ces résultats sont entièrement conformes à ceux des expériences de M. G. Sire.

Nous avons observé que, dans ces expériences, le nombre des positions d'équilibre se réduisait généralement à deux, dont une d'équilibre stable. Cet habile expérimentateur a cependant rencontré le cas où, la vitesse n étant modérée et ω ayant une valeur assez grande, il y a *quatre* positions d'équilibre. Voici, en effet, ce que nous lisons dans son Mémoire : « Toutefois, pour une certaine vitesse de rotation du tore, le parallélisme des axes (*) ne peut plus être obtenu, malgré l'accélération qu'on imprime au plateau (**). On voit bien le tore se rapprocher plus ou moins de l'axe CD (c'est notre axe ST), puis tout à coup il s'en écarte rapidement en obéissant à la force centrifuge qui alors prédomine (***). » C'est vers la position d'équilibre stable OM_2 que le pendule se porte dans cette circonstance.

45. Revenons à la question du mouvement, ou à l'intégration de l'équation (85). Nous avons immédiatement

$$(88)\quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\zeta^2}{dt} = \dfrac{H_3 - H_2 - C}{H_1}\,\omega^2 \sin^2\zeta + \dfrac{2Mg\rho}{H_1}\cos\zeta \\ \qquad - 2\,\dfrac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cl_1}{H_1}\,\omega\sin\zeta + l_2, \end{array} \right.$$

(*) Des axes Aζ et ST.

(**) C'est-à-dire lorsqu'on augmente la valeur de ω.

(***) *Mémoire sur un polytrope*, etc., p. 54. — Le problème de l'équilibre et du mouvement du tore-pendule a été traité par M. Resal, avec sa supériorité habituelle, dans les *Annales des mines* (5me série, t. XV, 1859, p. 553). Il a considéré la masse de la chape comme négligeable, et la vitesse rotatoire n comme très grande. La méthode suivie est d'ailleurs entièrement différente de la nôtre.

l_2 étant une nouvelle constante, déterminée, dans l'hypothèse où le pendule n'a aucune vitesse initiale dans le plan d'oscillation XOZ, par l'équation

$$l_2 = -\frac{H_3 - H_2 - C}{H_1}\omega^2 \sin^2\zeta_0 - \frac{2Mg\rho}{H_1}\cos\zeta_0 + 2\frac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cl_1}{H_1}\omega\sin\zeta_0.$$

Il est facile d'identifier l'équation (88) avec la formule (81) du n° 40; il suffit, pour cela, de poser

$$\frac{H_3 - H_2 - C}{H_1}\omega^2 = \omega'^2, \qquad \frac{M\rho}{H_1} = \frac{1}{r},$$

$$\frac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cl_1}{H_1} = \frac{\omega'^2\Delta}{r},$$

ce qui fournit, pour les éléments ω', r, Δ du pendule de comparaison, les valeurs

$$(89)\quad \begin{cases} \omega' = \omega\sqrt{\dfrac{H_3 - H_2 - C}{H_1}}, \\ r = \dfrac{H_1}{M\rho}, \\ \Delta = \dfrac{H_1}{H_3 - H_2 - C}\cdot\dfrac{M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cl_1}{M\omega\rho}. \end{cases}$$

La constante l_2 aura aussi, alors, évidemment la même valeur dans les équations (81) et (88), si l'on suppose que les valeurs de ζ_0 et de ζ'_0 soient les mêmes de part et d'autre. La fonction ζ du temps, définie par les équations (81), (88), sera donc la même, et le problème du tore-pendule est ramené à celui du § IX par le théorème suivant :

Dans le pendule gyroscopique de M. Sire, l'axe OA *du pendule se meut par rapport à la verticale* OZ, *dans le plan d'oscillation* XOZ, *comme un pendule simple dont le plan d'oscillation tournerait autour d'un axe vertical situé dans son plan avec une vitesse angulaire constante* ω', *la longueur* r *du pendule simple*,

la vitesse ω' et la distance Δ du point de suspension à l'axe de rotation étant données par les équations (89).

Ce théorème donne la solution du mouvement du pendule gyroscopique dans le sens le plus général. On remarquera encore que la valeur de r, longueur du pendule de comparaison, n'est autre que la longueur du pendule composé formé par le tore et sa chape autour de l'axe ab. Le signe de Δ dépendra de celui de l'expression

$$M\omega\partial_\rho \cos\alpha - Cl_1;$$

il serait donc négatif si l'on avait

$$\frac{n}{\omega} > \frac{M\partial_\rho \cos\alpha - C\sin\zeta_0}{C},$$

mais cela ne donne lieu à aucune difficulté, car nous savons (n° 40, remarque) que le signe négatif trouvé pour Δ indique seulement que l'on doit compter l'angle ζ positivement en sens contraire, à partir de la verticale OZ, c'est-à-dire de OZ vers OX'.

Enfin, on doit observer que la valeur de Δ dépend de celle de ζ_0, c'est-à-dire de l'écart initial du pendule OA par rapport à la verticale. La détermination du pendule de comparaison ne dépend donc pas uniquement des données *physiques* du *tore-pendule*, mais encore des conditions initiales de son mouvement. C'est pour cette raison que, dans l'étude des positions d'équilibre, nous avons trouvé une valeur de Δ différente de celle que nous venons d'obtenir.

Les formules du n° 40 serviront donc à déterminer le mouvement de l'axe OA dans le plan d'oscillation. Lorsqu'on aura ainsi exprimé ζ en fonction de t par les fonctions elliptiques, on tirera de l'égalité (84)

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \omega(\sin\zeta - \sin\zeta_0),$$

et une quadrature nouvelle fera connaître φ en fonction de t.

46. Le problème se simplifie notablement dans plusieurs circonstances.

I. Si la vitesse angulaire ω du bâti est très faible, de façon que l'on puisse négliger les quantités de l'ordre du carré ω^2, l'équation (80) se réduit à

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{2Mg\rho}{H_1}\cos\zeta + \frac{2Cn\omega}{H_1}\sin\zeta + l_2.$$

Déterminons deux constantes F et E par les équations

$$F\sin E = Cn\omega,$$
$$F\cos E = Mg\rho;$$

nous aurons

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{2F}{H_1}\cos(\zeta - E) + l_2.$$

Désignons par θ l'angle $\zeta - E$, c'est-à-dire l'angle compris entre l'axe OA du pendule à l'époque t et une droite OF (fig. 16), inclinée sur la verticale OZ, dans le plan d'oscillation, d'un angle E compté positivement de OZ vers OX. Posant, en outre,

$$\theta_0 = \zeta_0 - E,$$

nous verrons que l'équation différentielle du mouvement prendra la forme:

Fig. 16.

$$\frac{d\theta^2}{dt^2} = \frac{2F}{H_1}(\cos\theta - \cos\theta_0),$$

et *deviendra l'équation ordinaire du mouvement du pendule simple*, dans laquelle θ serait l'angle que fait le pendule avec la verticale et la longueur r du pendule serait donnée par l'équation

$$r = \frac{gH_1}{F}.$$

On a d'ailleurs, par ce qui précède,

$$(90)\qquad \begin{cases} \operatorname{tg} E = \dfrac{Cn\omega}{Mg\rho}, \\ F = \sqrt{C^2n^2\omega^2 + M^2g^2\rho^2}, \end{cases}$$

et si l'on néglige aussi les termes de l'ordre de ω^2 dans l'équation du n° 42 qui détermine les positions d'équilibre du pendule gyroscopique, on reconnaît que l'angle E défini par la première équation (90) est précisément celui qui répond à cet équilibre. La droite OF est dans l'angle XOZ ou dans l'angle X'OZ suivant que n est positif ou négatif. On a donc ce théorème :

Lorsque la vitesse angulaire du bâti Σ *autour de l'axe* ST *est assez petite pour que l'on puisse négliger les termes de l'ordre de* ω^2, *l'axe* OA *du pendule de M. Sire oscille dans le plan* XOZ, *de part et d'autre de sa position d'équilibre stable, suivant la même loi qu'un pendule simple dont la longueur serait donnée par l'équation*

$$r = \frac{gH_1}{\sqrt{C^2n^2\omega^2 + M^2g^2\rho^2}}.$$

II. Supposons maintenant qu'il existe, entre les données du problème, la relation

$$M\omega\delta\rho\cos\alpha - Cl_1 = 0,$$

ce qui aura lieu si le rapport $\frac{n}{\omega}$ des vitesses rotatoires du tore et du bâti vérifie l'équation

$$\frac{n}{\omega} = \frac{M\delta\rho\cos\alpha - C\sin\zeta_0}{C}.$$

Il est clair que cette condition peut toujours être réalisée. La valeur de Δ, fournie par l'équation (89), s'évanouit ; l'axe de rotation du plan d'oscillation du pendule de comparaison passe par le point de suspension de celui-ci. Nous retombons donc, cette fois encore, sur le problème du mouvement d'un point

pesant sur un cercle qui tourne uniformément autour d'un diamètre vertical, problème étudié dans les paragraphes II et III de la première partie.

III. Comme nous n'avons imposé à la chape d'autre condition que d'être symétrique par rapport à deux plans déterminés, rien ne nous empêche d'admettre que la tige OC, prolongée au delà du point O (fig. 17), porte sur ce prolongement un contre-poids II mobile le long de la tige, de façon que l'on puisse déplacer le centre de gravité du pendule tout entier et l'amener même, si l'on veut, en coïncidence avec le point O (*).

Fig. 17.

On aura alors

$$\rho = 0,$$

ce qui suppose la relation

$$ma + m_1 a_1 = 0, \qquad \text{ou} \qquad a_1 = -\frac{m}{m_1} a,$$

condition facile à réaliser dès que l'on connaît la masse de la chape, y compris celle du contre-poids II. Si l'on introduit dans l'équation (85) la condition $\rho = 0$, elle devient

$$(91) \quad \frac{d\zeta'}{dt} = \frac{H_3 - H_2 - C}{H_1} \omega^2 \sin\zeta \cos\zeta + \frac{Cl_1\omega}{H_1} \cos\zeta.$$

L'angle E qui détermine la position d'équilibre relatif du pendule est alors défini par l'équation

$$\left[(H_3 - H_2)\,\omega \sin E + Cn\right] \cos E = 0,$$

(*) Ce cas a été laissé de côté, naturellement, par les géomètres qui ont considéré la masse de la chape comme négligeable.

et peut admettre *quatre* valeurs distinctes : 1° les valeurs $E = \frac{\pi}{2}$ et $E = -\frac{\pi}{2}$, qui répondent à l'hypothèse $\cos E = 0$, et donnent deux positions d'équilibre OM_1 et OM_4 dirigées respectivement suivant OX et suivant OX′ (fig. 18) ;

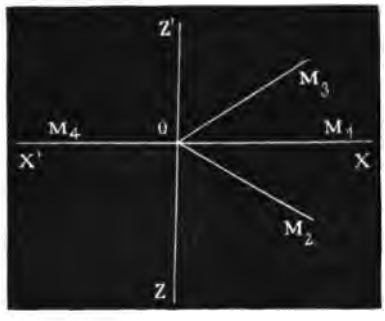


Fig. 18.

2° les deux valeurs déterminées par l'équation

$$\sin E = -\frac{Cn}{(H_3 - H_2)\,\omega},$$

et correspondant, si le second membre a une valeur numérique inférieure à l'unité, à deux positions d'équilibre OM_2 et OM_3 également inclinées sur l'horizontale, et faisant avec OX des angles aigus ou obtus suivant que n a une valeur positive ou négative.

Quand ces deux dernières positions d'équilibre existent, elles appartiennent à l'équilibre stable, les deux directions horizontales de OA répondant à l'équilibre instable. Quand ces dernières existent seules, l'une donne l'équilibre stable, l'autre l'équilibre instable.

Enfin, l'équation différentielle du mouvement (91) s'identifie avec l'équation (77) du n° 37 si l'on pose

$$\begin{cases} \dfrac{H_3 - H_2 - C}{H_1}\,\omega^2 = \omega'^2, \\ 0 = g, \\ \dfrac{Cl_1\omega}{H_1} = -\dfrac{\omega'^2\Delta}{r}, \end{cases}$$

et l'on en conclut que

Lorsque le centre de gravité du pendule gyroscopique est amené au point de suspension O, *le mouvement de son axe* OA *se ramène à celui d'un point non pesant, sur un cercle tournant autour d'une sécante verticale avec une vitesse angulaire con-*

stante ω', *cette vitesse et le rapport* $\frac{\Delta}{r}$ *étant données par les équations*

$$\omega' = \omega \sqrt{\frac{H_3 - H_2 - C}{H_1}},$$

$$\frac{\Delta}{r} = -\frac{Cl_1}{(H_3 - H_2 - C)\,\omega}.$$

L'équation (91) s'intégrerait d'ailleurs sans difficulté par les fonctions elliptiques, et conduirait à des formules semblables à celles que nous avons obtenues dans les paragraphes II et III.

IV. Si, à l'hypothèse dont nous venons de développer les conséquences, on ajoutait cette condition, que la vitesse ω fût assez minime pour qu'on pût négliger son carré, l'équation (91) se réduirait à la forme encore plus simple

$$\frac{d\zeta'}{dt} = \frac{Cn\omega}{H_1} \cos\zeta,$$

ou, en désignant par ξ l'angle compris entre l'axe OA du pendule et l'horizontale OX,

$$\frac{d\xi'}{dt} = -\frac{Cn\omega}{H_1} \sin\xi.$$

De là, on tire par l'intégration

$$\frac{d\xi^2}{dt^2} = \frac{2Cn\omega}{H_1}(\cos\xi - \cos\xi_0),$$

c'est-à-dire que la droite OA oscillerait, par rapport à l'horizontale OX, comme oscille par rapport à la verticale un pendule simple dont la longueur r est donnée par la formule

$$r = \frac{gH_1}{Cn\omega}.$$

47. Nous avons supposé le bâti Σ, qui porte le pendule, animé d'une vitesse constante ω autour de l'axe ST, et le pendule, avec son tore préalablement mis en rotation, abandonné sans

vitesse dans le plan d'oscillation XOZ. Mais dans les expériences les choses ne se passent pas tout à fait ainsi. Le tore étant mis en rotation et le pendule suspendu verticalement à l'axe *ab*, on imprime au bâti un mouvement de rotation, nécessairement accéléré, autour de ST, jusqu'à ce qu'il atteigne une certaine vitesse que l'on regarde comme sensiblement constante.

Il n'y a d'ailleurs aucune difficulté à modifier l'équation (85) de façon à l'accommoder à ces conditions nouvelles. En effet, dans le calcul du n° 41, il n'y a rien à changer à l'expression de T_2 ni à celle de U. Celle de N est modifiée en ce que, à la composante normale $\omega^2\delta$ de l'accélération J, il faut joindre la composante tangentielle

$$\delta\frac{d\omega}{dt},$$

dirigée normalement au plan méridien OBS et dans le sens où le mouvement a lieu. Cette composante fait donc avec la direction OA un angle dont le cosinus est égal à

$$-\sin\alpha\sin\zeta,$$

en sorte qu'on a ici

$$U + N = M\rho\left(g\cos\zeta - \omega^2\delta\cos\alpha\sin\zeta + \delta\frac{d\omega}{dt}\sin\alpha\sin\zeta\right)$$

L'équation (84) subsiste sans modification; l'équation (85) qui détermine l'angle ζ devient, eu égard à la valeur de U + N et après élimination de φ',

$$\frac{d\zeta'}{dt} = \frac{H_3 - H_2 - C}{H_1}\omega^2\sin\zeta\cos\zeta - \frac{Mg\rho}{H_1}\sin\zeta + \frac{1}{H_1}\left[Cl_1\omega - M\rho\delta\left(\omega^2\cos\alpha - \frac{d\omega}{dt}\sin\alpha\right)\right]\cos\zeta.$$

Cette équation compte seulement un terme de plus que l'équation (85), mais elle est en réalité bien plus compliquée au point de vue de l'intégration, à cause des quantités ω et $\frac{d\omega}{dt}$ qui sont maintenant des fonctions du temps, dont l'expression dépend de

la loi du mouvement autour de l'axe ST. A moins de choisir des hypothèses particulières, il paraît difficile de pousser plus avant la solution du problème.

Nous ferons, au sujet de la comparaison entre les résultats du calcul et ceux de l'expérience, dans le pendule de M. Sire, une remarque analogue à celle que nous avons proposée au sujet du *Polytrope*. Le calcul du mouvement oscillatoire du pendule, de part et d'autre d'une position d'équilibre stable, suppose le mouvement de rotation du bâti Σ parfaitement uniforme. Or, cette condition ne peut être remplie, à moins de supposer une masse en quelque sorte infinie au bâti. En pratique, la rotation du système mobile autour de l'axe ST est communiquée par la main agissant sur une manivelle; les réactions du pendule sur son axe de suspension *ab* et sur le bâti Σ dépendent de l'angle ζ et varient d'un instant à l'autre, d'après la position du pendule. Il en résulte forcément des alternatives d'accélération et de ralentissement dans la vitesse ω, et, par suite, notre hypothèse (ω constant) ne s'accorde pas pleinement avec la réalité.

Cette observation s'accorde, pour le fond, avec celles que M. Resal a présentées sur le même sujet dans son mémoire.

TROISIÈME PARTIE.

Mouvements relatifs à la surface d'une planète douée d'un mouvement de rotation uniforme.

—

§ XI.

48. Nous allons, en vue de traiter diverses questions se rapportant aux mouvements relatifs à la surface de la terre, considérer ce que deviennent les équations (2) et suivantes, § I, lorsque le système de comparaison OXYZ est lié à une planète, animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe AB fixe dans l'espace (nous ferons abstraction d'un mouvement de translation de l'astre), et agissant par attraction sur les corps placés à la surface.

La *pesanteur*, en un point quelconque, sera la résultante de l'attraction de la planète et de la réaction centrifuge due à la rotation de l'astre; l'accélération qu'elle détermine sera désignée par g. *Nous regarderons la pesanteur comme constante en grandeur et en direction par rapport à la planète*, dans toute l'étendue du corps S (dont les dimensions sont d'ailleurs supposées fort restreintes) et à toute époque. Nous savons qu'il n'en est pas rigoureusement ainsi sur la terre, et que lorsqu'on tient compte, comme nous le ferons ici, des quantités de l'ordre du carré ω^2 de la vitesse de rotation de la planète, on ne peut négliger les variations d'intensité et de direction de la force centrifuge dans un petit espace, pas plus que celles de l'attraction. Mais, sans développer ici les raisons pour lesquelles, parmi les diverses hypothèses simplificatrices, nous avons choisi celle-là (*), nous dirons que nos calculs, entendus comme étant *rigoureusement exacts*, ne s'appliquent que dans l'hypothèse formulée plus haut.

(*) Voir, à la fin du mémoire, la note I.

Ce point admis, cherchons la fonction U des forces *absolues*, qui se réduisent ici à l'attraction de la planète sur le corps S. D'après ce qui a été dit ci-dessus, l'attraction sur un point de masse m est la résultante de la pesanteur mg et de la force *centripète* due à la rotation autour de AB ; U est donc la somme des fonctions correspondant à ces deux forces pour tous les points matériels du système S. La première est égale, comme on le voit sans peine, à

$$Mg\rho \cos \overline{\rho g}.$$

M étant la masse de S, ρ le rayon mené du point O à son centre de gravité G, $\overline{\rho g}$ l'angle que fait la direction OG avec celle de la pesanteur.

Quant à la seconde, pour un point m situé à la distance r de l'axe AB, le travail élémentaire de la force centripète dans le mouvement relatif a pour expression

$$-m\omega^2 r dr = d\left(\frac{-m\omega^2 r^2}{2}\right),$$

donc la fonction de ces forces, pour le corps S tout entier, sera

$$-\frac{\omega^2}{2}\sum mr^2 = -\frac{\omega^2 H_1}{2},$$

H_1 étant le moment d'inertie du système S par rapport à AB, à l'instant considéré.

Mais il vaut mieux introduire ici le moment d'inertie H du corps par rapport à la parallèle NOS à l'axe de rotation AB de la planète, menée par le point O. Or, d'après un théorème bien connu, si δ désigne la perpendiculaire abaissée du point O sur l'axe AB, $\overline{\rho\delta}$ l'angle compris entre cette droite et le rayon vecteur OG du centre de gravité, ces deux moments d'inertie H et H_1 sont liés par la relation

$$H_1 = H + M\delta^2 - 2M\delta\rho \cos \overline{\rho\delta}.$$

On a donc, pour la fonction des forces due à l'attraction de la planète sur le corps S,

$$U = Mg\rho \cos \overline{\rho g} - \tfrac{1}{2}\omega^2 H + M\omega^2 \delta\rho \cos \overline{\rho\delta} - \tfrac{1}{2}\omega^2 M\delta^2.$$

Pour évaluer N, observons que l'origine O du système de comparaison OXYZ décrit, par suite de la rotation de la planète, un cercle de rayon δ autour de AB, avec une vitesse angulaire constante ω. L'accélération J a donc pour valeur $\omega^2\delta$ et sa direction est celle de la perpendiculaire δ; donc, en vertu de l'équation (3),

$$N = -M\omega^2\delta\rho\cos\overline{\rho\delta},$$

et si l'on néglige le terme $\frac{\omega^2 M\delta^2}{2}$ qui, étant constant, disparaîtra dans les différentiations, on trouve enfin

$$U + N = Mg\rho\cos\overline{\rho g} - \tfrac{1}{2}H\omega^2.$$

Substituons dans l'équation (2) du n° 1 cette valeur de U + N, ainsi que l'expression de T_2 donnée par la formule (4); observons que $\frac{1}{2}H\omega^2$ n'est autre chose que la quantité G; que d'ailleurs G, ne dépendant que des positions *actuelles* des points du corps par rapport à NOS et nullement de leurs vitesses, ne saurait renfermer les variables q' dans son expression, mais seulement les variables q, et nous trouverons que l'équation (2) se réduit à

$$(92)\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q'} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q} = Mg\frac{\partial.\rho\cos\overline{\rho g}}{\partial q}.$$

Telle est, dans l'hypothèse que nous avons acceptée, l'équation qui déterminerait le mouvement relatif d'un corps ou d'un système de corps S par rapport à la planète en rotation uniforme, agissant par attraction sur ce corps. S'il existait d'autres forces motrices, il faudrait naturellement ajouter dans l'expression de U les termes correspondants. L'équation (92) renferme ce théorème important :

On peut, dans la supposition admise, appliquer les formules dynamiques de Lagrange au mouvement apparent d'un corps pesant à la surface d'une planète en rotation uniforme, comme si celle-ci était en repos, pourvu 1° que l'on ajoute à la demi-force vive T *du corps le produit géométrique de l'axe instantané* OS *du système de comparaison par l'axe d'impulsion relatif* OQ

du corps (*); *2° que l'on remplace, dans l'évaluation de la fonction des forces, l'attraction de la planète par la pesanteur.*

49. Lorsque le centre de gravité G du système mobile S occupe une position invariable par rapport à la planète, on peut placer en ce point l'origine O du système de comparaison OXYZ. On a donc $\rho = 0$, et l'équation (92) se réduit à celle-ci :

$$(93) \quad \cdots \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q'} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q} = 0.$$

Tout ce qui va suivre repose sur l'application des équations (93) et (92), remarquables par leur simplicité.

§ XII.

MOUVEMENT APPARENT D'UN GYROSCOPE COMPLET DE FOUCAULT.

50. L'équation (93) conduit rapidement aux équations différentielles du mouvement relatif d'un gyroscope de Foucault complet, par rapport à une planète tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe.

L'appareil n'est autre que le gyroscope composé d'un tore D et de deux anneaux E et I, décrit au § IV et au § VI à propos du polytrope (fig. 3 et 5). Le système de comparaison OXYZ (fig. 19), fixe relativement à la planète, a son origine au centre de gravité commun O des trois corps D, I, E; l'axe OZ coïncide avec l'axe de rotation, fixe également, de l'anneau extérieur E; OX avec la projection, sur le plan XY, de la parallèle ON à l'axe AB, *menée*

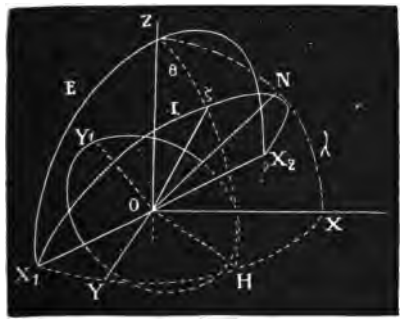


Fig. 19.

(*) Voir au n° 2.

dans un sens tel que la rotation de l'astre s'effectue de la droite vers la gauche relativement à **ON** (négativement). Pour abréger, **ON** sera appelé la *ligne boréale*. **OY** est perpendiculaire à **OX**, **OZ**; λ est l'angle **XON** dont la ligne boréale est inclinée sur **OX**. Nous conservons d'ailleurs aux angles θ, ψ, φ et aux moments **A**, **C**, A_1, C_1, A_2, C_2 la même signification qu'au n° 26, mais γ, γ_1, γ_2 seront ici les angles compris entre les axes principaux OX_1, OY_1, $O\zeta$ du tore et la ligne *boréale* **ON**. Dès lors, il est clair que les expressions de **T** et de **U** resteront les mêmes qu'au n° 26, avec ce seul changement que, **ON** n'étant plus la direction propre de l'axe instantané de la rotation d'entraînement, mais son prolongement (*), il faudra changer le signe de ω dans les formules. On aura donc, par un calcul identique,

$$T=\tfrac{1}{2}\left[(A+A_1)\theta'^2+(A+C_1)\psi'^2\sin^2\theta+A_1\psi'^2\cos^2\theta+A_2\psi'^2+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)^2\right],$$

$$V=-\omega\left[(A+A_1)\theta'\cos\gamma+(A+C_1)\psi'\sin\theta\cos\gamma_1+A_1\psi'\cos\theta\cos\gamma_2 + C(\varphi'+\psi'\cos\theta)\cos\gamma_2+A_2\psi'\sin\lambda\right].$$

De là, si l'on pose encore pour abréger

$$A+A_1=a,\quad A+C_1-A_1=b,\quad A_1+A_2=a',$$

et si l'on a égard aux relations (55) qui subsistent, savoir

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos\lambda\cos\psi,\\ \cos\gamma_1 &= \sin\lambda\sin\theta-\cos\lambda\cos\theta\sin\psi,\\ \cos\gamma_2 &= \sin\lambda\cos\theta+\cos\lambda\sin\theta\sin\psi,\end{aligned}\right.$$

on déduira

$$(94)\quad \left\{\begin{aligned}T+V=&\tfrac{1}{2}\left[a\theta'^2+(a'+b\sin\theta)\psi'^2+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)^2\right]\\ &-\omega\left[a\theta'\cos\gamma+(a'+b\sin^2\theta)\psi'\sin\lambda-b\psi'\cos\lambda\sin\theta\cos\theta\sin\psi\right.\\ &\left.+C(\varphi'+\psi'\cos\theta)\cos\gamma_2\right].\end{aligned}\right.$$

En substituant cette valeur de $T+V$ dans l'équation (95) et prenant successivement q égal à φ, à ψ et à θ, on en déduira

---

(*) Voir la note du n° 2.

les équations différentielles du mouvement relatif du gyroscope, dans les différents cas considérés par MM. Quet, Resal, Lottner, Bour, etc., comme nous allons le faire voir.

51. PROBLÈME VIII. — *Les trois corps* D, I, E, *pouvant se mouvoir librement autour de leurs axes respectifs* $O\zeta$, OX_1, OZ, *on fixe ce dernier dans la direction* ON *de la ligne boréale, on imprime au tore une vitesse rotatoire* n, *positive ou négative, autour de son axe* $O\zeta$ *maintenu en repos apparent, puis on abandonne l'appareil à lui-même. Déterminer le mouvement des diverses pièces du gyroscope, ou les valeurs de* θ, ψ, φ, *en fonction du temps.*

Comme on a ici

$$\lambda = 90^\circ,$$

il en résulte

$$\cos\gamma = 0, \quad \cos\gamma_1 = \sin\theta, \quad \cos\gamma_2 = \cos\theta,$$

et la valeur de T + V s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} T + V = {} & \tfrac{1}{2}\left[a\theta'^2 + (a' + b\sin^2\theta)\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\right] \\ & - \omega\left[(a' + b\sin^2\theta)\psi' + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta\right], \end{aligned}$$

ou sous celle-ci, plus commode dans le problème actuel,

$$\begin{aligned} T + V = {} & \tfrac{1}{2}\left[a\theta'^2 + (a' + b\sin^2\theta)(\psi' - \omega)^2 + C(\varphi' + \overline{\varphi' - \omega}\cos\theta)^2\right] \\ & - \frac{\omega^2}{2}(a' + b\sin^2\theta + C\cos^2\theta). \end{aligned}$$

On a donc, en vertu de l'équation (93), comme T + V ne renferme explicitement ni φ, ni ψ,

$$(95)\quad \left\{\begin{array}{l} C\dfrac{d}{dt}\left[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta\right] = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left[(a' + b\sin^2\theta)(\psi' - \omega) + C(\varphi' + \overline{\psi' - \omega}\cos\theta)\cos\theta\right] = 0, \\ a\dfrac{d\theta'}{dt} - (\psi' - \omega)^2 b\sin\theta\cos\theta + C\left[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta\right](\psi' - \omega)\sin\theta \\ \qquad - \omega^2(C - b)\sin\theta\cos\theta = 0. \end{array}\right.$$

Les deux premières donnent évidemment, l_1 et l_2 étant des constantes arbitraires,

$$(96) \quad \ldots \quad \varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta = l_1,$$

$$(97) \quad \ldots \quad (a' + b\sin^2\theta)(\psi' - \omega) + Cl_1\cos\theta = l_2.$$

On déduit de la seconde l'égalité

$$(98) \quad \ldots \quad \psi' - \omega = \frac{l_2 - Cl_1\cos\theta}{a' + b\sin^2\theta},$$

et cette valeur de $\psi' - \omega$, substituée dans la troisième des équations (95) avec celle de $\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta$, la transforme comme il suit :

$$(99) \quad \left\{ a\frac{d\theta'}{dt} - \frac{(l_2 - Cl_1\cos\theta)^2}{(a' + b\sin^2\theta)^2} b\sin\theta\cos\theta + \frac{(l_2 - Cl_1\cos\theta)\,Cl_1\sin\theta}{a' + b\sin^2\theta} - \omega^2(C - b)\sin\theta\cos\theta = 0. \right.$$

L'intégrale de cette équation est évidemment

$$(100) \quad \ldots \quad a\theta'^2 + \frac{(l_2 - Cl_1\cos\theta)^2}{a + b\sin^2\theta} - \omega^2(C - b)\sin^2\theta = l_3,$$

l_3 désignant une nouvelle constante à déterminer.

Les conditions du problème fournissent, pour $t = 0$, les valeurs

$$\theta' = 0, \quad \psi' = 0, \quad \varphi' = n, \quad \theta = \theta_0,$$

ce qui donne pour les constantes l_1, l_2, l_3, d'après les égalités (96), (97) et (100), les expressions

$$(101) \quad \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} l_1 &= n - \omega\cos\theta_0, \\ l_2 &= Cl_1\cos\theta_0 - \omega(a' + b\sin^2\theta_0), \\ l_3 &= \omega^2\left[a' + (2b - C)\sin^2\theta_0\right]. \end{aligned} \right.$$

On peut aussi tirer de la troisième équation (95) la valeur de

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\theta'}{dt}$$

pour $t = 0$, en y remplaçant ψ', φ', θ par leurs valeurs initiales. On trouve, réductions faites,

$$(102) \quad \ldots\ldots \left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_0 = \frac{Cn\omega \sin \theta_0}{a}.$$

52. Ce qui précède donne lieu déjà à quelques remarques intéressantes :

1° Si l'on veut que l'axe du tore reste en repos *apparent* par rapport à la planète, il faut que θ soit constant, et pour cela, le second membre de l'équation (102) doit être nul. On est donc conduit à l'une ou à l'autre de ces deux conditions :

$$\sin \theta_0 = 0, \quad n = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe du tore doit être dirigé parallèlement à l'axe de rotation de la planète, ou bien la vitesse initiale du tore doit être nulle. Si l'une de ces conditions est réalisée, il suit de l'équation (98) que ψ' sera *constant*, et par conséquent nul, puisque $\psi'_0 = 0$; l'axe $O\zeta$ gardera donc une direction relative invariable ;

2° Les équations (100) et (102) diffèrent de celles qui leur correspondent dans le mémoire de M. Lottner (*), tandis qu'elles s'accordent avec celles de M. Quet (**). Cela tient à ce que M. Quet admet la même hypothèse que nous, en ce qui concerne la pesanteur, tandis que M. Lottner regarde seulement comme constante l'*attraction*, et pour lui, le centre de gravité devient le point d'application de la résultante des forces attractives. Il en résulte que, tandis que dans notre hypothèse le système mobile reste en repos apparent lorsque le tore n'a reçu aucune rotation initiale ($n = 0$), dans le système d'idées de M. Lottner, il prendrait un mouvement déterminé.

Il va sans dire que, lorsqu'on néglige les termes de l'ordre de ω^2, les deux hypothèses conduisent à des résultats concordants. Mais

---

(*) *Journal de Crelle*, t. LIV, 1857, pp. 197-226, § 3

(**) *Journal de Liouville*, t. XVIII, 1853, 4e sect., § 2.

il est assez curieux de rechercher la condition de construction dans l'appareil qui, si elle était réalisée, ferait disparaître de notre équation (100) le terme

$$\omega^2 (C - b) \sin^2 \theta,$$

et la rendrait ainsi identique à celle de M. Lottner. Or, cette condition est évidemment celle-ci :

$$C - b = 0, \quad \text{ou} \quad C - A = C_1 - A_1,$$

c'est-à-dire, que *l'excès du moment d'inertie axial sur le moment d'inertie équatorial ait la même valeur dans le tore et dans l'anneau intérieur*.

Nous avons déjà rencontré cette condition dans deux problèmes antérieurs (n^os^ 15 et 33);

3° L'intégration de l'équation (100) dépend, en général, des fonctions hyperelliptiques, mais on peut indiquer des particularités de construction ou de circonstances initiales pour lesquelles le problème se simplifie. Par exemple, supposons que l'on ait à la fois les conditions

$$b = 0, \quad l_2 = 0,$$

d'où résulteraient les relations

$$A + C_1 = A_1; \quad l_1 = \frac{a'\omega}{C \cos \theta_0},$$

ou

$$n = \frac{\omega (a' + C \cos^2 \theta_0)}{C \cos \theta_0}.$$

La première condition peut être réalisée, comme nous l'avons déjà vu au n° 20, par une construction exceptionnelle de l'instrument; la seconde le serait par une rotation convenable imprimée au tore. L'équation (100) se réduit alors à

$$a\theta'^2 + \frac{a'\omega^2 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta_0} - C\omega^2 \sin^2 \theta = \omega^2 (a' - C \sin^2 \theta_0),$$

d'où l'on tire

$$dt = \pm \frac{\cos\theta_0 \sqrt{a}}{\omega \sqrt{a' + C\cos^2\theta_0}} \cdot \frac{d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta_0 - \cos^2\theta}},$$

équation facile à intégrer par les fonctions elliptiques.

58. *Développement de la solution dans le cas où l'on néglige les masses des anneaux.*

La détermination du mouvement du gyroscope s'effectue encore par les fonctions elliptiques lorsque l'on néglige les masses des pièces I et E. On a alors évidemment, A_1, C_1, A_2, C_2 étant regardés comme insensibles,

$$a = A, \quad b = A, \quad a' = 0.$$

L'équation (100) se réduit à

$$A\sin^2\theta \frac{d\theta^2}{dt^2} = \left[l_3 + \omega^2 (C - A)\sin^2\theta\right] A\sin^2\theta - (l_2 - Cl_1\cos\theta)^2,$$

et les constantes l_1, l_2, l_3 aux expressions suivantes :

$$(103) \quad \ldots \quad \begin{cases} l_1 = n - \omega\cos\theta_0, \\ l_2 = Cl_1\cos\theta_0 - A\omega\sin^2\theta_0, \\ l_3 = (2A - C)\,\omega^2\sin^2\theta_0. \end{cases}$$

Si nous posons

$$x = \cos\theta,$$

l'équation différentielle s'écrira

$$(104) \quad A\frac{dx^2}{dt^2} = \left[l_3 + \omega^2(C - A)(1 - x^2)\right] A(1 - x^2) - (l_2 - Cl_1 x)^2 = X,$$

X désignant, pour abréger, le polynôme du quatrième degré en x qui figure au second membre de l'équation.

Il est nécessaire, pour la solution du problème, de connaître les racines de l'équation $X = 0$. Admettons, comme c'est le cas pour tous les gyroscopes employés, que l'on ait

$$C - A > 0.$$

Le coefficient de x^4 dans le polynôme X, savoir $A(C - A)\omega^2$, étant positif, X prendra successivement les signes que voici :

pour	$x = -\infty$,	$X > 0$;
pour	$x = -1$,	$X = -(l_2 + Cl_1)^2 < 0$;
pour	$x = \cos\theta_0$,	$X = 0$ (puisque θ'_0 est nul);
pour	$x = +1$,	$X = -(l_2 - Cl_1)^2 < 0$;
pour	$x = +\infty$,	$X > 0$.

Il y a donc une racine réelle x_2 entre $-\infty$ et -1, une racine réelle $x_0 = \cos\theta_0$ entre -1 et $+1$; une racine réelle x_3 entre $+1$ et $+\infty$, et comme X a le même signe pour $x = -1$ et $x = +1$, la quatrième racine réelle x_1 est aussi comprise entre -1 et $+1$. On pourra donc poser

$$x_1 = \cos\theta_1.$$

Il n'arrivera pas, d'ailleurs, que les racines x_1 et x_2 soient égales, car on trouve, pour la dérivée X′ du polynôme X,

$$(\alpha) \quad \tfrac{1}{2} X' = -2A(C - A)\omega^2 x(1 - x^2) - Al_3 x + Cl_1(l_2 - Cl_1 x),$$

et pour $x = x_0 = \cos\theta_0$, eu égard aux valeurs de l_1, l_2, l_3,

$$(\alpha') \quad \ldots\ldots\ldots \quad X'_0 = -2AC n\omega \sin^2\theta_0.$$

Si x_0 était une racine double, X'_0 serait nul, ce qui ne peut avoir lieu que pour $n = 0$ ou $\sin\theta_0 = 0$. Nous tombons alors dans l'un des cas où l'axe $O\zeta$ reste en équilibre relatif (n° 52, 1°).

Ainsi les quatre racines de la fonction X sont réelles et inégales. Nous les supposerons actuellement connues. De plus, la fonction X est positive lorsque x est compris entre x_0 et x_1, et devient négative lorsque x sort de ces limites ; or, comme x part de la valeur x_0 pour $t = 0$, que X doit demeurer positif puisque le premier membre de l'équation (104) est un carré, on voit déjà que x restera toujours compris entre x_0 et x_1 sans pouvoir dépasser ces deux valeurs extrêmes. L'angle θ oscille donc indéfiniment entre θ_0 et θ_1, ce qui fait prévoir une oscillation périodique de l'axe $O\zeta$. Mais il faut déterminer le plus grand de ces

deux angles et, pour cela, recourir à l'équation (102), qui devient ici

$$\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right)_0 = \frac{Cn\omega \sin\theta_0}{A}.$$

A l'instant $t = 0$, θ' est nul; son signe, à partir de cet instant, sera donc celui de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, c'est-à-dire celui de n, puisque C, A, ω, $\sin\theta_0$ sont positifs. Donc

1° *Si* n *est positif* ou si la rotation initiale du tore est de gauche à droite par rapport à la portion $O\zeta$ de son axe, θ' sera d'abord positif, l'angle θ ira en croissant et $\cos\theta$ en décroissant; on aura donc

$$\theta_1 > \theta_0, \quad \cos\theta_1 < \cos\theta_0, \quad x_1 < x_0;$$

2° *Si* n *est négatif*, on aura, au contraire,

$$\theta_1 < \theta_0, \quad \cos\theta_1 > \cos\theta_0, \quad x_1 > x_0.$$

Nous discuterons successivement ces deux hypothèses.

54. *Premier cas*, $n > 0$. — L'angle θ varie entre θ_0, limite inférieure, et θ_1, limite supérieure. Les racines de X, rangées par ordre de grandeur, sont

$$x_2 < x_1 < x_0 < x_3,$$

et l'on a d'ailleurs

$$(105) \quad X = A(C - A)\omega^2 (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

On tire de l'équation (104), en déterminant le signe par la considération que, x étant d'abord décroissant, $\frac{dx}{dt}$ doit être négatif,

$$dt = -\frac{A\,dx}{\sqrt{X}} = -\frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{A}{C-A}}\,\frac{dx}{\sqrt{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}}.$$

Posons, suivant la transformation de Richelot,

$$(106) \quad \begin{cases} \dfrac{1-k}{1+k} = \sqrt{\dfrac{(x_1-x_2)(x_3-x_0)}{(x_3-x_1)(x_0-x_2)}}, \\ \dfrac{x-x_1}{x-x_0} = -\sqrt{\dfrac{(x_1-x_2)(x_3-x_1)}{(x_0-x_2)(x_3-x_0)}}\cdot\dfrac{1-z}{1+z}, \end{cases}$$

en choisissant $\frac{dx}{dz}$ négatif pour que z varie dans le même sens que t, et depuis -1 jusqu'à $+1$. Ces substitutions nous donnent, d'après le calcul connu,

$$dt = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{A}{C-A}}\,\frac{2\sqrt{k}}{\sqrt{(x_0-x_1)(x_3-x_2)}}\,\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}.$$

Posons, pour plus de simplicité,

$$(\beta)\quad \ldots\quad \rho = \frac{\omega}{2}\sqrt{\frac{(C-A)(x_0-x_1)(x_3-x_2)}{Ak}},$$

et intégrons l'équation précédente, en observant que, pour $t=0$, on a $x=x_0$ et, par suite, $z=-1$. Il viendra

$$\rho t = \int_{-1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K + \int_{0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}\ (*),$$

d'où

$$(107)\quad \ldots\quad z = \operatorname{sn}(\rho t - K) = -\operatorname{sn}(\rho t + K).$$

On a donc z en fonction elliptique du temps. Cette formule montre bien que z varie périodiquement entre -1 et $+1$, et par conséquent θ entre θ_0 et θ_1. Pour déterminer la durée τ de l'oscillation de l'angle θ, il suffit d'observer que z, et par conséquent θ, reprend la même valeur lorsque l'argument $\rho t + K$ augmente de $4K$; donc

$$\tau = \frac{4K}{\rho} = \frac{8K\sqrt{Ak}}{\omega\sqrt{(C-A)(x_0-x_1)(x_3-x_2)}}.$$

Substituant la valeur de z dans la seconde équation (106), nous aurons, pour déterminer θ en fonction du temps, l'équation

$$\frac{\cos\theta-\cos\theta_1}{\cos\theta_0-\cos\theta} = \sqrt{\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_1)}{(x_0-x_2)(x_3-x_0)}}\cdot\frac{1+\operatorname{sn}(\rho t+K)}{1-\operatorname{sn}(\rho t+K)}.$$

(*) K ayant ici, comme au n° 8, la signification que lui attribue Jacobi.

Mais elle peut être simplifiée. En effet, en vertu de l'équation (105), si X_0' et X_1' désignent les valeurs de la dérivée X′ pour $x = x_0$ et $x = x_1$ respectivement, on a

$$X_0' = A(C - A)\omega^2 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3),$$
$$X_1' = A(C - A)\omega^2 (x_1 - x_0)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3),$$

d'où

$$\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_0)} = -\frac{X_1'}{X_0'}.$$

Or, la fonction X′ est connue par l'équation (α), et sa valeur X_0' pour $x = x_0$ par l'équation (α'); nous aurons donc, sans qu'il soit besoin de connaître x_2 et x_3,

$$(108) \quad \sqrt{\frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_0)}} = \frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{\frac{X_1'}{2AC n\omega}}.$$

D'ailleurs, on a la formule

$$\operatorname{sn}(\rho t + K) = \frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\theta_2(\rho t)}{\theta_3(\rho t)},$$

donc, enfin,

$$(109) \quad \frac{\cos\theta - \cos\theta_1}{\cos\theta_0 - \cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{\frac{X_1'}{2AC n\omega}} \cdot \frac{\sqrt{k}\,\theta_3(\rho t) + \theta_2(\rho t)}{\sqrt{k}\,\theta_3(\rho t) - \theta_2(\rho t)},$$

équation qui exprime cos θ en fonction du temps au moyen des fonctions de Jacobi.

On peut aussi écrire l'équation (109) sous une autre forme, en partant de la relation connue

$$\frac{1 - \operatorname{sn} u}{1 + \operatorname{sn} u} = \frac{\operatorname{cn}^2 \tfrac{1}{2}(K + u)}{\operatorname{cn}^2 \tfrac{1}{2}(K - u)},$$

d'où l'on déduit

$$\frac{1 - z}{1 + z} = \frac{1 - \operatorname{sn}(\rho t - K)}{1 + \operatorname{sn}(\rho t - K)} = \frac{\operatorname{cn}^2(\tfrac{1}{2}\rho t)}{\operatorname{cn}^2(K - \tfrac{1}{2}\rho t)}$$
$$= \frac{\operatorname{cn}^2(\tfrac{1}{2}\rho t)}{\operatorname{cn}^2(\tfrac{1}{2}\rho t + K)} = \frac{\theta_4^2(\tfrac{1}{2}\rho t)\,\theta_3^2(\tfrac{1}{2}\rho t)}{\theta^2(\tfrac{1}{2}\rho t)\,\theta_1^2(\tfrac{1}{2}\rho t)}.$$

En substituant on aura

$$(110)\qquad \frac{\cos\theta - \cos\theta_1}{\cos\theta_0 - \cos\theta} = \frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{\frac{X_1'}{2ACn\omega}}\left[\frac{\theta_2(\frac{1}{2}\rho t)\,\theta_3(\frac{1}{2}\rho t)}{\theta(\frac{1}{2}\rho t)\,\theta_1(\frac{1}{2}\rho t)}\right]^2.$$

Enfin, si l'on veut calculer cos θ par des séries très convergentes, on remarquera simplement que la formule connue

$$\operatorname{sn} x = \frac{2\pi}{k\mathrm{K}}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\sin\frac{(2n-1)\,\pi x}{2\mathrm{K}},$$

donne immédiatement pour z l'expression

$$(111)\qquad z = \frac{2\pi}{k\mathrm{K}}\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{q^{\frac{2n-1}{2}}}{1-q^{2n-1}}\cos\frac{(2n-1)\,2\pi t}{\tau}.$$

55. La détermination des racines x_2 et x_3 est facilitée par les remarques suivantes :

1° Supposons que l'on ait calculé x_1. Le terme en x_3 manque dans le polynôme X ; on a donc

$$x_0 + x_1 + x_2 + x_3 = 0,$$

d'où

$$(112)\qquad \ldots\ldots\quad x_2 + x_3 = -(x_0 + x_1).$$

De plus, le terme du premier degré en x se réduit à $2Cl_1l_2x$, en sorte que l'on a

$$x_0x_1(x_2 + x_3) + (x_0 + x_1)x_2x_3 = -\frac{2Cl_1l_2}{A(C-A)\omega^2};$$

par suite, eu égard à la relation (112),

$$x_2x_3 = x_0x_1 - \frac{2Cl_1l_2}{A(C-A)\omega^2(x_0 + x_1)}.$$

Il sera donc très facile de trouver x_2 et x_3 lorsque x_1 sera connu.

2° Si l'on suppose que la pièce D soit un disque homogène extrêmement aplati, de façon que le carré du rapport de son épaisseur à son diamètre soit négligeable, on sait que l'on a alors, entre les moments d'inertie C et A, la relation

$$C = 2A,$$

et il suit immédiatement des équations (103) que l_2 est nul.

L'équation $X = 0$ se réduit donc à

$$\omega^2 A^2 (1 - x^2)^2 - (l_3 - C l_1 x)^2 = 0,$$

ou

$$[\omega A (1 - x^2) + l_3 - C l_1 x][\omega A (1 - x^2) - l_3 + C l_1 x] = 0.$$

Elle se décompose donc en deux équations du second degré et sa résolution devient fort simple.

§ XIII.

(*Suite*). DÉTERMINATION DES ANGLES ψ ET φ EN FONCTION DU TEMPS.

56. Pour exprimer l'angle ψ en fonction du temps, on part de l'équation (98), qui se réduit, lorsqu'on néglige les masses des anneaux, à

$$\psi' - \omega = \frac{l_3 - C l_1 \cos\theta}{A \sin^2\theta} = \frac{l_3 - C l_1 x}{A(1 - x^2)},$$

d'où, par décomposition,

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega + \frac{l_3 + C l_1}{2A} \frac{1}{1 + x} + \frac{l_3 - C l_1}{2A} \frac{1}{1 - x}.$$

Intégrant, et désignant par ψ_0 la valeur initiale de ψ, on a

$$\psi = \psi_0 + \omega t + \frac{l_3 + C l_1}{2A} \int_0^t \frac{dt}{1 + x} + \frac{l_3 - C l_1}{2A} \int_0^t \frac{dt}{1 - x}.$$

Introduisons une variable u, proportionnelle au temps, savoir :

$$u = \rho t + K,$$

et posons, pour abréger l'écriture,

$$(113)\quad \left\{ \begin{aligned} \varpi &= \sqrt{\frac{x_1 - x_2}{x_0 - x_2}}, \\ \varpi' &= \sqrt{\frac{x_3 - x_0}{x_3 - x_1}}, \end{aligned} \right.$$

$$(114)\quad \left\{ \begin{aligned} F &= \varpi + \varpi', & F_1 &= \varpi - \varpi', \\ G &= \varpi x_0 + \varpi' x_1, & G_1 &= \varpi x_0 - \varpi' x_1 \end{aligned} \right.$$

Les relations (106) nous donneront alors facilement

$$(115)\quad k = \frac{1 - \varpi\varpi'}{1 + \varpi\varpi'},$$

$$x = \frac{G - G_1 z}{F - F_1 z},$$

$$\frac{1}{1 + x} = \frac{F - F_1 z}{(F + G) - (F_1 + G_1) z},$$

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{F - F_1 z}{(F - G) - (F_1 - G_1) z}.$$

En y mettant pour z sa valeur — sn u, substituant dans l'expression de ψ donnée plus haut, on trouvera

$$(116)\quad \left\{ \begin{aligned} \psi = \psi_0 + \omega t + \frac{l_2 + C l_1}{2A\rho} \int_K^u \frac{(F + F_1 \operatorname{sn} u)\, du}{(F + G) + (F_1 + G_1) \operatorname{sn} u} \\ + \frac{l_2 - C l_1}{2A\rho} \int_K^u \frac{(F + F_1 \operatorname{sn} u)\, du}{(F - G) + (F_1 - G_1) \operatorname{sn} u}. \end{aligned} \right.$$

On est donc encore ramené aux intégrales de la forme étudiée au n° 21, et dont la valeur est exprimée par la formule (49).

Il suffit de poser dans cette formule, pour la première des deux intégrales,

$$\alpha = \mathrm{F}, \quad \beta = \mathrm{F}_1, \quad \gamma = \mathrm{F} + \mathrm{G}, \quad \delta = \mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_1,$$

$$k \operatorname{sn} a = \frac{\mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_1}{\mathrm{F} + \mathrm{G}},$$

et pour la seconde,

$$\alpha = \mathrm{F}, \quad \beta = \mathrm{F}_1, \quad \gamma = \mathrm{F} - \mathrm{G}, \quad \delta = \mathrm{F}_1 - \mathrm{G}_1,$$

$$k \operatorname{sn} a_1 = \frac{\mathrm{F}_1 - \mathrm{G}_1}{\mathrm{F} - \mathrm{G}}.$$

On obtiendra ainsi l'équation

$$(117)\left\{\begin{aligned}
\psi = \psi_0 + \omega t &+ \left(\frac{l_2 + \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}+\mathrm{G}} + \frac{l_2 - \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho}\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F}-\mathrm{G}}\right)(u - \mathrm{K}) \\
&+ \frac{l_2 + \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho}\frac{\mathrm{FG}_1 - \mathrm{GF}_1}{k(\mathrm{F}+\mathrm{G})^2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}\left\{\frac{\theta'(a)}{\theta(a)}(u - \mathrm{K})\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\mathrm{l}.\left[\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\cdot\frac{1 + k \operatorname{sn}(a + \mathrm{K}) \operatorname{sn}(u + \mathrm{K})}{1 - k \operatorname{sn}(a + \mathrm{K}) \operatorname{sn}(u + \mathrm{K})}\right]\right\} \\
&- \frac{l_2 - \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho}\frac{\mathrm{FG}_1 - \mathrm{GF}_1}{k(\mathrm{F}-\mathrm{G})^2 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1}\left\{\frac{\theta'(a_1)}{\theta(a_1)}(u - \mathrm{K})\right. \\
&\left. + \frac{1}{2}\mathrm{l}.\left[\frac{\theta(u-a_1)}{\theta(u+a_1)}\cdot\frac{1 + k \operatorname{sn}(a_1 + \mathrm{K}) \operatorname{sn}(u + \mathrm{K})}{1 - k \operatorname{sn}(a_1 + \mathrm{K}) \operatorname{sn}(u + \mathrm{K})}\right]\right\}.
\end{aligned}\right.$$

Mais cette équation admet des réductions considérables.

57. Occupons-nous d'abord des arguments a et a_1. Il suit évidemment des équations (113) et de la condition $x_0 > x_1$ que ϖ et ϖ' sont compris entre zéro et l'unité. De plus, on a

$$\mathrm{FF}_1 = \varpi^2 - \varpi'^2 = \frac{(x_1 - x_2)(x_3 - x_1) - (x_0 - x_2)(x_3 - x_0)}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}$$

$$= \frac{(x_0 - x_1)(x_0 + x_1 - x_2 - x_3)}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}.$$

d'où, à cause de la relation (112),

$$\varpi^2 - \varpi'^2 = \frac{2(x_0 - x_1)^2}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)},$$

résultat positif, qui nous apprend que ϖ est plus grand que ϖ'. Il suit nécessairement de là que

$$k \operatorname{sn} a = \frac{\varpi(1 + x_0) - \varpi'(1 + x_1)}{\varpi(1 + x_0) + \varpi'(1 + x_1)}$$

est une quantité positive et inférieure à l'unité.

D'un autre côté, on a

$$\operatorname{cn}^2 a = 1 - \operatorname{sn}^2 a = 1 - \left(\frac{F_1 + G_1}{F + G}\right)^2 \left(\frac{1 + \varpi\varpi'}{1 - \varpi\varpi'}\right)^2,$$

et l'on trouve facilement, à cause des relations

$$F + G + F_1 + G_1 = 2\varpi(1 + x_0),$$

$$F + G - F_1 - G_1 = 2\varpi'(1 + x_1),$$

l'égalité

$$(F + G)^2(1 - \varpi\varpi')^2 - (F_1 + G_1)^2(1 + \varpi\varpi')^2$$

$$= 4\varpi\varpi'\left[(1 + x_0) - \varpi'^2(1 + x_1)\right]\left[(1 + x_1) - \varpi^2(1 + x_0)\right];$$

d'où, en remplaçant ϖ^2 et ϖ'^2 par leurs valeurs et substituant,

$$\operatorname{cn}^2 a = \frac{4\varpi\varpi'(x_0 - x_1)^2(1 + x_2)(1 + x_3)}{(F + G)^2(1 - \varpi\varpi')^2(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}. \tag{118}$$

Tous les facteurs sont positifs, à l'exception de $1 + x_2$ qui est négatif. On a donc

$$\operatorname{cn}^2 a < 0,$$

et, par suite,

$$\operatorname{sn}^2 a > 1.$$

Rapprochant ce résultat de celui que l'on a trouvé plus haut, on voit que sn a sera compris entre 1 et $\frac{1}{k}$; l'argument a est

donc de la forme $\sigma i + K$ (*), σ étant une constante réelle comprise entre zéro et K et déterminée par la relation

$$\operatorname{sn}(\sigma i + K) = \frac{1}{\operatorname{dn}(\sigma, k')} = \frac{1}{k}\frac{F_1 + G_1}{F + G},$$

d'où

$$\operatorname{dn}(\sigma, k') = k\,\frac{\varpi(1 + x_0) + \varpi'(1 + x_1)}{\varpi(1 + x_0) - \varpi'(1 + x_1)}.$$

Tirant ensuite la valeur de cn a de l'équation (118) et déterminant le signe de cn a par la relation connue

$$\operatorname{cn}(\sigma i + K) = -\frac{k' i \operatorname{sn}(\sigma, k')}{\operatorname{dn}(\sigma, k')},$$

on obtiendra

$$\operatorname{cn} a = -\frac{2i(x_0 - x_1)\sqrt{-\varpi\varpi'(1 + x_2)(1 + x_3)}}{(F + G)(1 - \varpi\varpi')\sqrt{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}}.$$

Enfin, on a

$$\operatorname{dn} a = \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a} = \sqrt{1 - \frac{(F_1 + G_1)^2}{(F + G)^2}},$$

ou

$$\operatorname{dn} a = \frac{2\sqrt{\varpi\varpi'(1 + x_0)(1 + x_1)}}{F + G},$$

le signe étant positif à cause de l'équation

$$a = \sigma i + K.$$

Il vient donc

$$\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a = -\frac{4i(x_0 - x_1)\varpi\varpi'}{(F + G)^2(1 - \varpi\varpi')} \cdot \frac{\sqrt{-(1 + x_0)(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3)}}{\sqrt{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}},$$

(*) i désigne dans tout ce qui suit le symbole $\sqrt{-1}$.

Mais, si l'on égale les deux expressions (104) et (105) de X, et que l'on y fasse $x = -1$, on trouve immédiatement

$$(1 + x_0)(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = -\frac{(l_2 + Cl_1)^2}{A(C - A)\omega^2};$$

par conséquent, *en désignant par* $\varkappa$ *une quantité qui sera égale à* $+1$ *ou à* -1 *suivant que* $l_2 + Cl_1$ *sera positif ou négatif,* on trouvera enfin

$$\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a = -\frac{4i\varkappa(x_0 - x_1)(l_2 + Cl_1)\varpi\varpi'}{\omega(F + G)^2(1 - \varpi\varpi')\sqrt{A(C - A)(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}}.$$

D'un autre côté, en vertu des équations (114) et (β), on a facilement

$$FG_1 - GF_1 = 2\varpi\varpi'(x_0 - x_1),$$

$$2A\rho = \frac{\omega}{\sqrt{k}}\sqrt{A(C - A)(x_0 - x_1)(x_3 - x_2)},$$

d'où, substituant ces divers résultats et ayant égard à l'équation (115),

$$\frac{l_2 + Cl_1}{2A\rho}\cdot\frac{FG_1 - GF_1}{k(F + G)^2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} = -\frac{\varkappa}{2i}\sqrt{\frac{(1 - \varpi^2\omega'^2)(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}{(x_0 - x_1)(x_3 - x_2)}}.$$

Mais on a évidemment

$$1 - \varpi^2\varpi'^2 = \frac{(x_0 - x_1)(x_3 - x_2)}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)},$$

d'où ce résultat remarquablement simple

$$(119)\quad \frac{l_2 + Cl_1}{2A\rho}\cdot\frac{FG_1 - GF_1}{k(F + G)^2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} = -\frac{\varkappa}{2i}.$$

58. Un calcul tout semblable s'applique à la réduction du coefficient

$$\frac{l_2 - Cl_1}{2A\rho}\cdot\frac{FG_1 - GF_1}{k(F - G)^2 \operatorname{cn} a_1 \operatorname{dn} a_1},$$

avec les modifications suivantes : l'équation

$$k \operatorname{sn} a_1 = \frac{F_1 - G_1}{F - G} = \frac{\varpi(1 - x_0) - \varpi'(1 - x_1)}{\varpi(1 - x_0) + \varpi'(1 - x_1)}$$

nous montre que sn a_1 est positif ou négatif suivant que l'on a

$$F_1 - G_1 \gtrless 0, \quad \text{ou} \quad \frac{\varpi}{\varpi'} \gtrless \frac{1 - x_1}{1 - x_0}.$$

Les deux cas étant possibles, nous aurons égard à cette distinction. On a ensuite

$$\operatorname{cn}^2 a_1 = 1 - \operatorname{sn}^2 a_1 = 1 - \frac{(F_1 - G_1)^2}{(F - G)^2} \frac{(1 + \varpi\varpi')^2}{(1 - \varpi\varpi')^2}$$

$$= \frac{4\varpi\varpi'(x_0 - x_1)^2 (1 - x_2)(1 - x_3)}{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)} < 0;$$

donc on a

$$\operatorname{sn}^2 a_1 > 1 \quad \text{et} \quad < \frac{1}{k^2},$$

d'où il suit que sn a_1 est compris, en valeur absolue, entre 1 et $\frac{1}{k}$, et qu'il faudra poser

$$a_1 = \sigma_1 i \pm K,$$

suivant que $F_1 - G_1$ sera $>$ ou < 0, σ_1 étant réel et compris entre zéro et K. On trouve ensuite

$$\operatorname{cn} a_1 = \operatorname{cn}(\sigma_1 i \pm K) = \mp \frac{k' i \operatorname{sn}(\sigma_1, k')}{\operatorname{dn}(\sigma_1, k')}$$

$$= \mp \frac{2i(x_0 - x_1)\sqrt{-\varpi\varpi'(1 - x_2)(1 - x_3)}}{(F - G)(1 - \varpi\varpi')\sqrt{(x_0 - x_2)(x_3 - x_1)}},$$

$$\operatorname{dn}^2 a_1 = 1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a_1 = \frac{4\varpi\varpi'(1 - x_0)(1 - x_1)}{(F - G)^2} > 0,$$

et comme dn a_1 est positif à cause de la relation

$$\mathrm{dn}\,(\sigma_1 i \pm \mathrm{K}) = \frac{k'\,\mathrm{cn}\,(\sigma_1, k')}{\mathrm{dn}\,(\sigma_1, k')},$$

on aura enfin

$$\mathrm{dn}\,a_1 = \frac{2}{\mathrm{F} - \mathrm{G}}\sqrt{\varpi\varpi'\,(1 - x_0)\,(1 - x_1)}.$$

Substituant et observant que l'on a, par l'expression de X,

$$(1 - x_0)\,(1 - x_1)\,(1 - x_2)\,(1 - x_3) = \frac{(l_2 - \mathrm{C}l_1)^2}{\mathrm{A}\,(\mathrm{C} - \mathrm{A})\,\omega^2},$$

on trouvera, toutes réductions faites,

$$(120) \quad . \quad . \quad -\frac{l_2 - \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho}\,\frac{\mathrm{FG}_1 - \mathrm{GF}_1}{k\,(\mathrm{F} - \mathrm{G})^2\,\mathrm{cn}\,a_1\,\mathrm{dn}\,a_1} = \pm\frac{\varkappa_1}{2i},$$

le signe supérieur se rapportant au cas où l'on a $\mathrm{F}_1 - \mathrm{G}_1 > 0$, le signe inférieur au cas de $\mathrm{F}_1 - \mathrm{G}_1 < 0$, et $\varkappa_1$ désignant $+1$ ou -1, selon que $l_2 - \mathrm{C}l_1$ est positif ou négatif.

59. Revenons maintenant à l'équation (117), et remarquons encore que l'on a

$$\frac{l_2 + \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F} + \mathrm{G}} + \frac{l_2 - \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho}\,\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{F} - \mathrm{G}} = \frac{\mathrm{F}\,(l_2\mathrm{F} - \mathrm{C}l_1\mathrm{G})}{\mathrm{A}\rho\,(\mathrm{F}^2 - \mathrm{G}^2)};$$

que, de plus,

$$\mathrm{sn}\,(u + \mathrm{K}) = \mathrm{sn}(\rho l + 2\mathrm{K}) = -\,\mathrm{sn}\,\rho l,$$

$$\mathrm{sn}\,(a + \mathrm{K}) = -\,\mathrm{sn}\,\sigma i,$$

$$\mathrm{sn}\,(a_1 + \mathrm{K}) = \mp\,\mathrm{sn}\,\sigma_1 i,$$

$$\frac{\theta'(a)}{\theta\,(a)} = \frac{\theta_3'\,(\sigma i)}{\theta_3\,(\sigma i)}, \quad \frac{\theta'(a_1)}{\theta\,(a_1)} = \frac{\theta_3'\,(\sigma_1 i)}{\theta_3\,(\sigma_1 i)},$$

$$\frac{\theta\,(u - a)}{\theta\,(u + a)} = \frac{\theta\,(\rho l - \sigma i)}{\theta\,(\rho l + \sigma i)}, \quad \frac{\theta\,(u - a_1)}{\theta\,(u + a_1)} = \frac{\theta\,(\rho l - \sigma_1 i)}{\theta\,(\rho l + \sigma_1 i)}.$$

Moyennant ces substitutions et eu égard aux équations (119) et (120), il viendra enfin

$$(121)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi = \psi_0 + \omega t + \dfrac{F(l_2F - Cl_1G)}{A(F^2 - G^2)}\, t \\ \quad - \dfrac{\varkappa}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma i)}{\theta_3(\sigma i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma i)}{\theta(\rho t + \sigma i)}\cdot\dfrac{1 + k\,\mathrm{sn}\,\sigma i\,\mathrm{sn}\,\rho t}{1 - k\,\mathrm{sn}\,\sigma i\,\mathrm{sn}\,\rho t}\right]\right\} \\ \quad \pm \dfrac{\varkappa_1}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma_1 i)}{\theta_3(\sigma_1 i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma_1 i)}{\theta(\rho t + \sigma_1 i)}\cdot\dfrac{1 \pm k\,\mathrm{sn}\,\sigma_1 i\,\mathrm{sn}\,\rho t}{1 \mp k\,\mathrm{sn}\,\sigma_1 i\,\mathrm{sn}\,\rho t}\right]\right\}. \end{array}\right.$$

On peut aussi éliminer les fonctions sn par la relation

$$\mathrm{sn}\,z = \frac{1}{\sqrt{k}}\cdot\frac{\theta_1(z)}{\theta(z)},$$

et l'on trouve, sous une autre forme,

$$(122)\quad \left\{\begin{array}{l} \psi = \psi_0 + \omega t + \dfrac{F(l_2F - Cl_1G)}{A(F^2 - G^2)}\, t \\ \quad - \dfrac{\varkappa}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma i)}{\theta_3(\sigma i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma i)}{\theta(\rho t + \sigma i)}\cdot\dfrac{\theta(\sigma i)\,\theta(\rho t) + \theta_1(\sigma i)\,\theta_1(\rho t)}{\theta(\sigma i)\,\theta(\rho t) - \theta_1(\sigma i)\,\theta_1(\rho t)}\right]\right\} \\ \quad \pm \dfrac{\varkappa_1}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma_1 i)}{\theta_3(\sigma_1 i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma_1 i)}{\theta(\rho t + \sigma_1 i)}\cdot\dfrac{\theta(\sigma_1 i)\,\theta(\rho t) \pm \theta_1(\sigma_1 i)\,\theta_1(\rho t)}{\theta(\sigma_1 i)\,\theta(\rho t) \mp \theta_1(\sigma_1 i)\,\theta_1(\rho t)}\right]\right\}. \end{array}\right.$$

On se souviendra que le signe supérieur se rapporte à $F_1 - G_1 > 0$, le signe inférieur à $F_1 - G_1 < 0$, et que l'on a

$$\varkappa = +1 \quad \text{ou} \quad -1 \quad \text{suivant que} \quad l_2 + Cl_1 \quad \text{est} \quad \gtrless 0,$$

$$\varkappa_1 = +1 \quad \text{ou} \quad -1 \quad \text{suivant que} \quad l_2 - Cl_1 \quad \text{est} \quad \gtrless 0.$$

60. La détermination de φ en fonction du temps résulte de l'équation

$$(96)\quad \ldots\ldots\quad \varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta = l_1,$$

d'où l'on tire, par l'expression de $\psi' - \omega$ donnée au n° 56,

$$\frac{d\varphi}{dt} = l_1 - \frac{l_2 + Cl_1}{2A}\,\frac{x}{1 + x} - \frac{l_2 - Cl_1}{2A}\,\frac{x}{1 - x}$$

ou encore,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{A - C}{A} l_1 + \frac{l_2 + Cl_1}{2A} \frac{1}{1+x} - \frac{l_2 - Cl_1}{2A} \frac{1}{1-x}.$$

En intégrant et désignant par φ_0 la valeur initiale de φ, on aura

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{A - C}{A} l_1 t + \frac{l_2 + Cl_1}{2A} \int_0^t \frac{dt}{1+x} - \frac{l_2 - Cl_1}{2A} \int_0^t \frac{dt}{1-x}.$$

On est donc ramené aux mêmes intégrales que dans l'évaluation de l'angle ψ, et en les remplaçant par leurs valeurs maintenant connues, on aura, après quelques transformations faciles sur lesquelles il est inutile d'insister,

$$(123) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + \dfrac{A - C}{A} l_1 t + \dfrac{F(Cl_1 F - l_2 G)}{A(F^2 - G^2)} t \\ \quad - \dfrac{\varkappa}{2i} \left\{ \dfrac{\theta_3'(\sigma i)}{\theta_3(\sigma i)} \rho t + \dfrac{1}{2} l. \left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma i)}{\theta(\rho t + \sigma i)} \cdot \dfrac{1 + k \operatorname{sn} \sigma i \operatorname{sn} \rho t}{1 - k \operatorname{sn} \sigma i \operatorname{sn} \rho t} \right] \right\} \\ \quad \pm \dfrac{\varkappa_1}{2i} \left\{ \dfrac{\theta_3'(\sigma_1 i)}{\theta_3(\sigma_1 i)} \rho t + \dfrac{1}{2} l. \left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma_1 i)}{\theta(\rho t + \sigma_1 i)} \cdot \dfrac{1 \pm k \operatorname{sn}(\sigma_1 i) \operatorname{sn}(\rho t)}{1 \mp k \operatorname{sn}(\sigma_1 i) \operatorname{sn}(\rho t)} \right] \right\}, \end{array} \right.$$

ou, en introduisant les fonctions θ,

$$(124) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + \dfrac{A - C}{A} l_1 t + \dfrac{F(Cl_1 F - l_2 G)}{A(F^2 - G^2)} \\ \quad - \dfrac{\varkappa}{2i} \left\{ \dfrac{\theta_3'(\sigma i)}{\theta_3(\sigma i)} \rho t + \dfrac{1}{2} l. \left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma i)}{\theta(\rho t + \sigma i)} \cdot \dfrac{\theta(\sigma i)\theta(\rho t) + \theta_1(\sigma i)\theta_1(\rho t)}{\theta(\sigma i)\theta(\rho t) - \theta_1(\sigma i)\theta_1(\rho t)} \right] \right\} \\ \quad \mp \dfrac{\varkappa_1}{2i} \left\{ \dfrac{\theta_3'(\sigma_1 i)}{\theta_3(\sigma_1 i)} \rho t + \dfrac{1}{2} l. \left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma_1 i)}{\theta(\rho t + \sigma_1 i)} \cdot \dfrac{\theta(\sigma_1 i)\theta(\rho t) \pm \theta_1(\sigma_1 i)\theta_1(\rho t)}{\theta(\sigma_1 i)\theta(\rho t) \mp \theta_1(\sigma_1 i)\theta_1(\rho t)} \right] \right\}. \end{array} \right.$$

Les angles θ, ψ, φ, dont dépendent à chaque instant les positions relatives du tore et de ses anneaux, étant exprimés explicitement en fonction du temps, le problème est entièrement résolu au point de vue analytique.

§ XIV.

(*Suite*). FORMULES POUR LE CAS OÙ n EST NÉGATIF.

81. *Deuxième cas; $n < 0$.* — La discussion et les calculs se font d'une manière toute semblable et conduisent à des résultats analogues, qu'il suffira d'indiquer brièvement.

L'angle θ que fait l'axe du tore avec ON varie entre θ_0, limite supérieure, et θ_1, limite inférieure; donc x_1 est $> x_0$ et les racines de X, rangées par ordre de grandeur, sont

$$x_2 < x_0 < x_1 < x_3.$$

La valeur de $\frac{dx}{dt}$ est d'abord positive. On a donc

$$dt = \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{A}{C-A}}\,\frac{dx}{\sqrt{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}},$$

et par la transformation de Richelot, en faisant varier z dans le même sens que t, on posera

$$\frac{1-k}{1+k} = \sqrt{\frac{(x_0-x_2)(x_3-x_1)}{(x_1-x_2)(x_3-x_0)}},$$

$$\frac{x_1-x}{x-x_0} = \sqrt{\frac{(x_1-x_2)(x_3-x_1)}{(x_0-x_2)(x_3-x_0)}}\cdot\frac{1-z}{1+z},$$

$$\rho = \frac{\omega}{2\sqrt{Ak}}\sqrt{(C-A)(x_1-x_0)(x_3-x_2)}.$$

On trouvera alors, comme dans le premier cas,

$$\rho dt = \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

d'où

$$z = \operatorname{sn}(\rho t - K) = -\operatorname{sn}(\rho t + K),$$

et l'on retombera, par les mêmes transformations, sur des résultats qui ne différeront de ceux du premier cas ($n > 0$) que par la signification de k et de ρ :

$$\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} = \frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{\frac{X_1'}{2ACn\omega}}\,\frac{1 + \operatorname{sn}(\rho t + K)}{1 - \operatorname{sn}(\rho t + K)},$$

ou

$$\frac{\cos\theta_1 - \cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0} = \frac{1}{\sin\theta_0}\sqrt{\frac{X_1'}{2ACn\omega}}\left[\frac{\theta_2(\tfrac{1}{2}\rho t)\,\theta_3(\tfrac{1}{2}\rho t)}{\theta(\tfrac{1}{2}\rho t)\,\theta_1(\tfrac{1}{2}\rho t)}\right]^2.$$

La durée de l'oscillation de l'axe du tore, dans le plan ZOζ, aura pour expression

$$\tau = \frac{4K}{\rho} = \frac{8K\sqrt{Ak}}{\omega\sqrt{(C - A)(x_1 - x_0)(x_3 - x_2)}}.$$

Pour calculer les valeurs de ψ et de φ, on se servira toujours des équations (98) et (96), qui se traiteront comme dans le cas précédent. En posant

$$u = \rho t + K,$$

$$\varpi = \sqrt{\frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_0}}, \qquad \varpi' = \sqrt{\frac{x_0 - x_2}{x_1 - x_2}},$$

et conservant aux lettres F, G, F_1, G_1 les mêmes significations que dans les équations (114), on trouvera, pour exprimer ψ, la même équation (116) que dans le cas de n positif. On reconnaîtra, par les grandeurs relatives des racines de X, que ϖ et ϖ' sont compris entre zéro et l'unité, et par l'égalité

$$\varpi^2 - \varpi'^2 = -\frac{2(x_1^2 - x_0^2)}{(x_3 - x_0)(x_1 - x_2)},$$

que ϖ est plus petit que ϖ'. Les arguments a et a_1 étant encore définis par les équations

$$k \operatorname{sn} a = \frac{F_1 + G_1}{F + G},$$

$$k \operatorname{sn} a_1 = \frac{F_1 - G_1}{F - G},$$

l'équation (117) subsistera sans changement. Mais comme sn a est ici négatif et compris, en valeur absolue, entre 1 et $\frac{1}{k}$, on doit poser

$$a = \sigma i - \mathrm{K},$$

σ étant compris entre zéro et K et défini par l'équation

$$\mathrm{sn}(\sigma i - \mathrm{K}) = -\frac{1}{\mathrm{dn}(\sigma, k')} = \frac{\mathrm{F}_1 + \mathrm{G}_1}{\mathrm{F} + \mathrm{G}} \cdot \frac{1 + \varpi\varpi'}{1 - \varpi\varpi'}.$$

On trouve ensuite, par une discussion analogue à celle du n° 57,

$$\mathrm{cn}\, a = \frac{2i(x_1 - x_0)\sqrt{-\varpi\varpi'(1 + x_2)(1 + x_3)}}{(\mathrm{F} + \mathrm{G})(1 - \varpi\varpi')\sqrt{(x_1 - x_2)(x_3 - x_0)}},$$

$$\mathrm{dn}\, a = \frac{2\sqrt{\varpi\varpi'(1 + x_0)(1 + x_1)}}{\mathrm{F} + \mathrm{G}},$$

et enfin

$$\frac{l_2 + \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho} \frac{\mathrm{FG}_1 - \mathrm{GF}_1}{k(\mathrm{F} + \mathrm{G})^2 \mathrm{cn}\, a\, \mathrm{dn}\, a} = -\frac{\varkappa}{2i},$$

$\varkappa$ désignant + 1 si $l_2 + \mathrm{C}l_1$ est positif, — 1 si $l_2 + \mathrm{C}l_1$ est négatif.

De même, σ_1 étant un argument réel compris entre zéro et K, on trouvera

$$a_1 = \sigma_1 i \pm \mathrm{K},$$

où l'on prendra le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que l'on aura

$$\frac{\varpi}{\varpi'} \gtrless \frac{1 - x_1}{1 - x_0},$$

et il en résultera, après diverses transformations analogues à celles du n° 58,

$$-\frac{l_2 - \mathrm{C}l_1}{2\mathrm{A}\rho} \frac{\mathrm{FG}_1 - \mathrm{GF}_1}{k(\mathrm{F} - \mathrm{G})^2 \mathrm{cn}\, a_1\, \mathrm{dn}\, a_1} = \pm \frac{\varkappa_1}{2i},$$

où $\varkappa_1 = \pm 1$ suivant que $l_2 - \mathrm{C}l_1$ est $> $ ou < 0.

Substituant ces résultats dans l'équation (116) et opérant les mêmes réductions qu'au n° 59, on trouvera enfin les deux formules suivantes :

$$(121')\quad \left\{\begin{array}{l} \psi = \psi_0 + \omega t + \dfrac{F(l_2F - Cl_1G)}{A(F^2 - G^2)} \\ \quad - \dfrac{\varkappa}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma i)}{\theta_3(\sigma i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma i)}{\theta(\rho t + \sigma i)}\cdot\dfrac{1 + k\,sn(\sigma i)\,sn(\rho t)}{1 - k\,sn(\sigma i)\,sn(\rho t)}\right]\right\} \\ \quad \pm \dfrac{\varkappa_1}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma_1 i)}{\theta_3(\sigma_1 i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma_1 i)}{\theta(\rho t + \sigma_1 i)}\cdot\dfrac{1 \pm k\,sn(\sigma_1 i)\,sn(\rho t)}{1 \mp k\,sn(\sigma_1 i)\,sn(\rho t)}\right]\right\}. \end{array}\right.$$

$$(122')\quad \left\{\begin{array}{l} \psi = \psi_0 + \omega t + \dfrac{F(l_2F - Cl_1G)}{A(F^2 - G^2)} \\ \quad - \dfrac{\varkappa}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma i)}{\theta_3(\sigma i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma i)}{\theta(\rho t + \sigma i)}\cdot\dfrac{\theta(\sigma i)\theta(\rho t) + \theta_1(\sigma i)\theta_1(\rho t)}{\theta(\sigma i)\theta(\rho t) - \theta_1(\sigma i)\theta_1(\rho t)}\right]\right\} \\ \quad \pm \dfrac{\varkappa_1}{2i}\left\{\dfrac{\theta_3'(\sigma_1 i)}{\theta_3(\sigma_1 i)}\rho t + \dfrac{1}{2}\,l.\left[\dfrac{\theta(\rho t - \sigma_1 i)}{\theta(\rho t + \sigma_1 i)}\cdot\dfrac{\theta(\sigma_1 i)\theta(\rho t) \pm \theta_1(\sigma_1 i)\theta_1(\rho t)}{\theta(\sigma_1 i)\theta(\rho t) \mp \theta_1(\sigma_1 i)\theta_1(\rho t)}\right]\right\}. \end{array}\right.$$

Elles ne diffèrent respectivement des équations (121) et (122) que par la signification des lettres k, ρ, etc... La valeur de φ en fonction du temps se calculerait aussi de la même manière que dans le premier cas (n° 60) et l'on serait pareillement ramené aux équations (123) et (124). Il est donc inutile de répéter ces calculs.

62. *Quelques conséquences mécaniques des formules précédentes.*

La détermination, en fonction du temps, des angles θ, ψ, φ dépend, comme on l'a vu, de la résolution d'une équation du quatrième degré en x, $X = 0$, dont on connaît à l'avance une racine

$$x_0 = \cos\theta_0.$$

Il est donc possible de débarrasser l'équation de cette racine. Si l'on remplace, dans l'équation $X = 0$, l_2 et l_3 par leurs valeurs (103), en observant que l'on a

$$\cos\theta = x_0, \quad \sin^2\theta_0 = 1 - x_0^2,$$

on obtient

$$\left[Cl_1(x_0 - x) - A\omega_1 - x_0^2\right]^2$$
$$- \omega^2\left[(2A - C)(1 - x_0^2) + (C - A)(1 - x^2)\right]A(1 - x^2) = 0,$$

ou, après quelques réductions faciles,

$$C^2 l_1^2 (x_0 - x)^2 - 2ACl_1\omega(x_0 - x)(1 - x_0^2)$$
$$+ \omega^2 A\left[(A - C)(1 - x^2) - A(1 - x_0^2)\right](x_0^2 - x^2) = 0.$$

Supprimant le facteur $x_0 - x$, on aura l'équation du troisième degré

$$C^2 l_1^2 (x_0 - x) - 2ACl_1\omega(1 - x_0^2) + \omega^2 A(x_0 + x)\left[A(x_0^2 - x^2) - C(1 - x^2)\right] = 0.$$

Elle a pour racines x_1, x_2, x_3, la première seule étant comprise entre -1 et $+1$. Si maintenant nous remplaçons l_1 par sa valeur $n - \omega x_0$ et si nous ordonnons suivant les puissances ascendantes de $\frac{\omega}{n}$, nous aurons

$$C^2(x_0 - x) - \frac{2C\omega}{n}\left[Cx_0(x_0 - x) + A(1 - x_0^2)\right]$$
$$+ \frac{\omega^2}{n^2}\left[C^2 x_0^2 (x_0 - x) + 2ACx_0(1 - x_0^2) + A^2(x_0 + x)(x_0^2 - x^2)\right.$$
$$\left. - AC(x_0 + x)(1 - x^2)\right].$$

Posons, pour plus de simplicité,

$$x = x_0 - \delta,$$
$$\frac{A}{C} = \mu < 1.$$

Nous aurons, après quelques réductions faciles et en divisant par C^2,

$$(125)\quad \delta - \frac{2\omega}{n}(\mu + x_0\delta - \mu x_0^2) + \frac{\omega^2\delta}{n^2}\left[\mu + (1 - \mu)x_0^2 - \mu(1 - \mu)(2x_0 - \delta)^2\right] = 0.$$

Les racines de cette équation du troisième degré en δ sont les différences $x_0 - x_1, x_0 - x_2, x_0 - x_3$. En joignant la condition que x_1 soit compris entre -1 et $+1$, on aura tout ce qu'il faut pour déterminer la valeur de δ qui correspond à cette racine. On arrive ainsi à quelques conséquences intéressantes :

1° Si, comme c'est le cas dans les expériences de Foucault à la surface de la terre, ω est très petit et n extrêmement grand, de sorte que le rapport $\frac{\omega}{n}$ ait une valeur excessivement petite dont le carré soit absolument négligeable, comme les quantités

$$\mu, \quad x_0, \quad \delta = x_0 - x_1,$$

sont, en valeur absolue, moindres que 1 ou que 2; les coefficients des puissances de $\frac{\omega}{n}$ dans l'équation (125) ne pourront dépasser des limites assez faibles et faciles à assigner. Il s'ensuit, nécessairement, que la racine δ qui correspond à $x_0 - x_1$ ne peut être qu'une quantité très voisine de zéro. Le troisième terme de l'équation, qui a pour facteur

$$\frac{\omega^2\delta}{n^2},$$

sera donc tout à fait négligeable, et l'on aura avec une très grande approximation

$$\delta = \frac{2\omega}{n}(\mu + x_0\delta - \mu x_0^2),$$

ou, en négligeant encore un terme de l'ordre de $\frac{\omega^2}{n^2}$,

$$\delta = \cos\theta_0 - \cos\theta_1 = \frac{2A\omega\sin^2\theta_0}{Cn}.$$

On voit par là que les angles θ_0 et θ_1 ne différeront pas l'un de l'autre d'une quantité appéciable ; l'axe $O\zeta$ du tore paraîtra donc faire un angle constant avec ON et décrira, dans son mouvement apparent, un cône de révolution autour de la ligne

boréale (*). On retrouve ainsi les résultats déjà connus par les méthodes d'approximation ordinaires; aussi nous ne nous y arrêterons pas. Nous ferons observer seulement que les racines δ qui, dans l'équation (125), correspondent à x_2 et à x_3, sont nécessairement très grandes, sans quoi l'on conclurait comme plus haut qu'elles doivent être très voisines de zéro, ce qui est évidemment impossible. Ainsi x_2 et x_3 auront des valeurs absolues très grandes, mais à cause de la relation

$$x_2 + x_3 = -(x_0 + x_1),$$

leur somme algébrique sera très voisine de x_0.

2° Si l'on supposait, au contraire, le cas (tout à fait idéal) où la valeur de n étant assez faible, celle de ω serait extrêmement grande, ce serait alors le rapport $\frac{n}{\omega}$ dont le carré serait négligeable. L'équation (125) admettrait encore une racine δ très voisine de zéro et sa valeur approchée serait

$$\delta = \frac{2n}{\omega} \cdot \frac{\mu \sin^2 \theta_0}{\mu + (1-\mu)(1-4\mu)\cos^2 \theta_0}.$$

23. Lorsque l'on a

$$C = A,$$

c'est-à-dire lorsque l'ellipsoïde central du corps tournant se réduit à une sphère, la valeur de θ s'obtient sous forme finie en fonction du temps. L'équation (104) se réduit, en effet, à

$$A\frac{dx^2}{dt^2} = Al_3(1-x^2) - (l_2 - Cl_1 x)^2,$$

et l'on a la condition initiale

$$Al_3(1-x_0^2) - (l_2 - Cl_1 x_0)^2 = 0,$$

(*) Ce résultat ne nous paraît pas démontré, chez la plupart des auteurs qui introduisent tout d'abord l'hypothèse de $\frac{\omega}{n}$ très petit, avec une rigueur satisfaisante.

d'où l'on tire l'équation

$$dt = \pm \frac{A dx}{\sqrt{(x_0 - x)\left[(Al_3 + C^2 l_1^2)(x_0 + x) - 2Cl_1 l_2\right]}}.$$

Posons

$$x_0 - x = \xi,$$

d'où

$$x_0 + x = 2x_0 - \xi,$$

et observons que la relation $C = A$ donne lieu aux réductions suivantes :

$$l_2 = Al_1 x_0 - A\omega(1 - x_0^2) = A(nx_0 - \omega),$$
$$l_3 = A\omega^2(1 - x_0^2),$$
$$Al_3 + C^2 l_1^2 = A^2(n^2 - 2n\omega x_0 + \omega^2),$$
$$Cl_1 l_2 = A^2(n - \omega x_0)(nx_0 - \omega).$$

Nous trouverons facilement

$$dt = \mp \frac{d\xi}{\sqrt{2n\omega(1 - x_0^2)\xi - (n^2 - 2n\omega x_0 + \omega^2)\xi^2}},$$

ou, en posant pour abréger

$$c = \frac{n\omega(1 - x_0^2)}{n^2 - 2n\omega x_0 + \omega^2},$$

intégrant et remarquant que $t = 0$ donne $\xi = 0$,

$$t\sqrt{n^2 - 2n\omega x_0 + \omega^2} = \pm \arccos\frac{c - \xi}{c},$$

d'où enfin, par des transformations faciles

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - 2c\sin^2\left(\frac{t}{2}\sqrt{n^2 - 2n\omega x_0 + \omega^2}\right).$$

On remarquera que l'expression

$$\sqrt{n^2 - 2n\omega x_0 + \omega^2}$$

représente précisément la vitesse de la rotation *absolue* du tore à l'époque $t = 0$.

64. Les équations (121) et (123) qui fournissent l'expression des angles ψ et φ, déterminent le mouvement de *précession* du tore et sa rotation par rapport à l'anneau intérieur. On remarquera que ces angles se composent l'un et l'autre de trois parties distinctes : une partie constante, une deuxième qui est proportionnelle au temps, une troisième qui est périodique, et dont la période a même durée que celle de l'oscillation de l'axe $O\zeta$, savoir

$$\tau = \frac{4K}{\rho}.$$

La vitesse de la précession apparente, ou la vitesse avec laquelle la ligne X_1OX_2 se déplace sur le plan XY, est la valeur de ψ' fournie par l'équation

$$\psi' - \omega = \frac{l_2 - Cl_1 \cos\theta}{A \sin^2\theta}.$$

En remplaçant l_2 par sa valeur, cette équation deviendra

$$\psi' = \frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{A \sin^2\theta}\left[Cl_1 + A\omega(\cos\theta_0 + \cos\theta)\right].$$

Cette formule fait voir que ψ' s'annule chaque fois que θ reprend la valeur θ_0, ou que l'inclinaison de l'axe du tore sur OZ revient à sa valeur initiale. Il y a donc, à chaque période d'oscillation, un instant où la vitesse de précession s'annule.

Quant au signe de ψ', il dépend des données du problème. On peut écrire l'équation sous cette autre forme :

$$\psi' = \frac{n(\cos\theta_0 - \cos\theta)}{A \sin^2\theta}\left[C + \frac{\omega}{n}(A - C)\cos\theta_0 + \frac{\omega}{n} A \cos\theta\right].$$

Lorsque le rapport $\frac{\omega}{n}$ est excessivement petit, comme dans les

expériences de Foucault, il est clair que le signe de ψ' est le même que celui du produit

$$n(\cos\theta_0 - \cos\theta),$$

lequel est toujours *positif*, comme on l'a montré au n° 53. Le mouvement de précession a donc lieu de OX vers OY, ou en sens contraire du mouvement de rotation de la terre.

§ XV.

MOUVEMENT DU GYROSCOPE DE FOUCAULT (*suite*).

85. PROBLÈME IX. — *L'axe de l'anneau extérieur* E *étant fixé dans une direction arbitraire* OZ (fig. 20), *l'anneau intérieur est fixé au premier sous un angle droit, en sorte que l'axe* Oζ *du tore ne peut se mouvoir que dans un plan* XY *fixe par rapport à la planète. Une rotation initiale, avec vitesse* n, *est imprimée au tore autour de son axe* Oζ *maintenu immobile; déterminer le mouvement qui en résulte pour tout le système.*

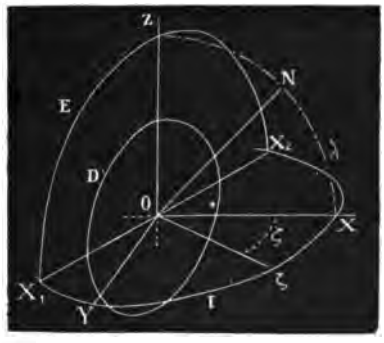


Fig. 20.

Nous conservons les mêmes notations qu'au n° 50, mais nous avons, en vertu de l'hypothèse actuelle,

$$\theta = const = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = 0, \quad \cos\theta = 0.$$

De plus, si ζ désigne l'angle que fait, dans le plan XY, l'axe Oζ

du tore avec OX, compté positivement de OX vers OY, nous aurons

$$\psi = \zeta + \frac{\pi}{2},$$

et les équations (55) donneront

$$\cos\gamma = -\cos\lambda\sin\zeta,$$
$$\cos\gamma_1 = \sin\lambda,$$
$$\cos\gamma_2 = \cos\lambda\cos\zeta,$$

de sorte que l'équation (94) deviendra

$$T + V = \tfrac{1}{2}\left[(a'+b)\zeta'^2 + C\varphi'^2\right] - \omega\left[(a'+b)\zeta'\sin\lambda + C\varphi'\cos\lambda\cos\zeta\right].$$

Appliquant donc l'équation (93) et prenant successivement $q = \varphi$, $q = \zeta$, on trouve immédiatement

$$C\frac{d}{dt}(\varphi' - \omega\cos\lambda\cos\zeta) = 0,$$
$$(a'+b)\frac{d}{dt}(\zeta' - \omega\sin\lambda) - C\omega\varphi'\cos\lambda\sin\zeta = 0.$$

Ces équations donnent, en posant

$$(126)\quad \omega_1 = \omega\cos\lambda, \quad \mu = \frac{C}{a'+b} = \frac{C}{A + C_1 + A_2},$$

et désignant par l_1 une constante arbitraire,

$$(127)\quad \varphi' = l_1 + \omega_1\cos\zeta,$$

$$(128)\quad \frac{d\zeta'}{dt} = \mu\omega_1(l_1 + \omega_1\cos\zeta)\sin\zeta.$$

La valeur de la constante l_1, donnée par l'état initial, est

$$l_1 = n - \omega_1\cos\zeta_0,$$

et l'angle ζ_0 pourra toujours être supposé compris entre zéro et π.

Pour déduire de l'équation (128) les conditions de l'équilibre relatif de l'axe du tore, on posera

$$\left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_0 = 0,$$

et l'on aura

$$\mu\omega_1 n \sin\zeta_0 = 0,$$

ce qui suppose 1° ou bien $n = 0$, c'est-à-dire que le tore soit en repos apparent à l'instant initial; 2° ou bien $\sin\zeta_0 = 0$, c'est-à-dire que *l'axe du tore soit dirigé, à l'époque* $t = 0$, *suivant la projection* OX *de la ligne boréale sur le plan directeur, ou suivant son prolongement.* Une de ces positions répond à l'équilibre stable, l'autre à l'équilibre instable. Il serait facile de les discerner dès à présent, mais la discussion du mouvement dans le cas général suffira pour résoudre la question.

66. Multiplions l'équation (128) par $2d\zeta$, intégrons et observons que ζ' est nul pour $\zeta = \zeta_0$; il viendra

$$\zeta'^2 = 2\mu\omega_1 l_1 (\cos\zeta_0 - \cos\zeta) + \mu\omega_1^2 (\cos^2\zeta_0 - \cos^2\zeta),$$

ou

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \mu\omega_1^2 (\cos\zeta - \cos\zeta_0)\left(-\frac{2l_1}{\omega_1} - \cos\zeta_0 - \cos\zeta\right).$$

Pour identifier cette équation avec l'équation (11) du mouvement du pendule à plan d'oscillation tournant, il suffira de poser

$$\mu\omega_1^2 = \omega'^2, \quad -\frac{l_1}{\omega_1} = \frac{g}{r\omega'^2},$$

d'où l'on tirera

$$(129) \quad \ldots \quad \omega' = \omega_1\sqrt{\mu}, \quad r = -\frac{g}{\mu\omega_1 l_1},$$

ou encore, en remettant pour μ, ω_1, l_1 leurs valeurs,

$$(130) \quad \ldots \quad \begin{cases} \omega' = \omega\cos\lambda\sqrt{\dfrac{C}{A + C_1 + A_2}}, \\ r = -\dfrac{g(A + C_1 + A_2)}{\omega C\cos\lambda(n - \omega\cos\lambda\cos\zeta_0)}. \end{cases}$$

Le signe de r sera contraire à celui de l_1, qui se trouve déterminé par les valeurs de n et de $\cos\zeta_0$, mais cette circonstance ne peut donner lieu à aucune difficulté, puisque nous avons vu, au n° 3, qu'un changement de signe de r dans le mouvement du pendule revient à un renversement dans la direction de la pesanteur, ou de la droite à partir de laquelle se compte l'angle ζ. La solution complète du mouvement de l'axe du tore est donc donnée par le théorème suivant :

Lorsque l'axe Oζ *du gyroscope est assujetti à se mouvoir dans un plan fixe par rapport à la planète, son mouvement est le même que celui d'un pendule simple de longueur* r, *dont le plan d'oscillation tourne autour de la verticale de suspension avec une vitesse angulaire constante* ω', *les valeurs de* r *et de* ω' *étant données par les équations* (130), *et la direction de la verticale étant remplacée par la projection* OX *de la ligne boréale sur le plan directeur.*

Il ne reste donc qu'à appliquer les formules données aux paragraphes II et III pour le mouvement du pendule et à en déduire les conséquences qu'elles comportent, en distinguant les trois cas que présente la valeur de r, savoir :

$$\text{A)}\quad n - \omega_1 \cos\zeta_0 < 0,$$
$$\text{B)}\quad n - \omega_1 \cos\zeta_0 > 0,$$
$$\text{C)}\quad n - \omega_1 \cos\zeta_0 = 0.$$

Cette discussion offrant la plus grande analogie avec celles des §§ IV et V, nous nous permettrons d'abréger.

Il en sera de même des formules qui déterminent l'angle φ, ou la rotation du disque par rapport à l'anneau intérieur : on suivra la même marche qu'au § V. Substituant à l_1 sa valeur dans l'égalité (127), on a d'abord

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi}{dt} = n + \omega_1(\cos\zeta - \cos\zeta_0),$$

d'où, intégrant et posant

$$u = \rho t + \mathrm{K},$$

on tirera

$$(131) \quad . \quad . \quad \varphi = \varphi_0 + nt + \frac{\omega_1}{\rho} \int_K^u (\cos\zeta - \cos\zeta_0)\, du,$$

équation dans laquelle il faudra substituer à ρ et à $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ les valeurs qui se rapporteront aux différents cas que nous allons étudier.

67. Dans la supposition A), l_1 est négatif, r positif, les formules du § II s'appliquent sans changement, OX étant pris pour direction de la pesanteur dans le pendule de comparaison. La quantité f (n° 5) est ici

$$f = -\frac{2l_1}{\omega_1} - \cos\zeta_0 = -\frac{2n}{\omega_1} + \cos\zeta_0.$$

Les trois cas $f - \cos\zeta_0 > 0, = 0, < 0$, reviennent ici à

$$\text{I)} \quad n < 0, \qquad \text{II)} \quad n = 0, \qquad \text{III)} \quad n > 0.$$

Le deuxième répond à l'équilibre de l'axe $O\zeta$; nous n'avons plus à en parler. Les cas I) et III) correspondent respectivement *à une rotation imprimée au tore, autour de son axe* $O\zeta$, *de droite à gauche ou de gauche à droite.*

Enfin, le cas I) ou $n < 0$ donne lieu à trois hypothèses subsidiaires

$$a) \quad f < 1; \qquad b) \quad f = 1; \qquad c) \quad f > 1,$$

ou, après substitution,

$$\begin{cases} n > -\omega_1 \sin^2\dfrac{\zeta_0}{2}, \\ n = -\omega_1 \sin^2\dfrac{\zeta_0}{2}, \\ n < -\omega_1 \sin^2\dfrac{\zeta_0}{2}. \end{cases}$$

68. Cas I, *a*). L'angle ζ varie entre sa limite *supérieure* ζ_0 et une limite *inférieure* ζ_1 donnée par l'équation

$$\cos\zeta_1 = -\frac{2n}{\omega_1} + \cos\zeta_0,$$

ou

$$\cos\zeta_1 - \cos\zeta_0 = -\frac{2n}{\omega_1}.$$

L'axe du gyroscope oscille dans le plan XY, *en se rapprochant et s'éloignant alternativement de la position* OX (position d'équilibre stable) *sans jamais l'atteindre.*

Si l'on pose

$$\alpha = \frac{\zeta_0 + \zeta_1}{2}, \quad \beta = \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{2},$$

$$k = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = -\frac{n}{\omega_1 \sin^2\alpha}, \quad \rho = \omega_1\sqrt{\mu}\sin\alpha,$$

la valeur de $\cos\zeta$ en fonction du temps sera donnée par les équations

$$(19) \quad \ldots \cos\zeta = \frac{\cos\alpha - k\cos\beta\,\mathrm{sn}(\rho t + \mathrm{K})}{\cos\beta - k\cos\alpha\,\mathrm{sn}(\rho t + \mathrm{K})},$$

$$(21) \quad \cos\zeta - \cos\zeta_0 = \sin\zeta_0 \sin\beta \frac{1 - \mathrm{sn}(\rho t + \mathrm{K})}{\cos\beta - k\cos\alpha\,\mathrm{sn}(\rho t + \mathrm{K})}.$$

La durée d'une oscillation de l'axe $O\zeta$ sera

$$\tau = \frac{4\mathrm{K}}{\rho} = \frac{4\mathrm{K}}{\omega_1\sqrt{\mu}\sin\alpha}.$$

69. La formule (131) devient, par la substitution de la valeur de $\cos\zeta - \cos\zeta_0$,

$$\varphi = \varphi_0 + nt + \frac{k\sin\zeta_0}{\sqrt{\mu}} \int_{\mathrm{K}}^{u} \frac{1 - \mathrm{sn}\,u}{\cos\beta - k\cos\alpha\,\mathrm{sn}\,u}\,du$$

On fera usage de la formule (49), où l'on aura

$$\operatorname{sn} a = -\frac{\cos\alpha}{\cos\beta},$$

ce qui donnera

$$(132)\quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + nt + \dfrac{k\sin\zeta_0}{\sqrt{\mu}}\dfrac{u-\mathrm{K}}{\cos\beta} + \dfrac{\sin\zeta_0\sin\zeta_1}{\sqrt{\mu}\sin\alpha\cos^2\beta\,\operatorname{cn} a\,\operatorname{dn} a} \\ \left\{\dfrac{\theta'(a)}{\theta(a)}(u-\mathrm{K}) + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{l}.\left[\dfrac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\cdot\dfrac{1+k\operatorname{sn}(a+\mathrm{K})\operatorname{sn}(u+\mathrm{K})}{1-k\operatorname{sn}(a+\mathrm{K})\operatorname{sn}(u+\mathrm{K})}\right]\right\}. \end{cases}$$

Opérant ensuite comme au n° 22, on observe que l'équation

$$\cos\zeta_0 + \cos\zeta_1 = -\frac{2(n-\omega_1\cos\zeta_0)}{\omega_1}$$

et la condition $n - \omega_1\cos\zeta_0 < 0$ donnent $\cos\zeta_0 + \cos\zeta_1 > 0$, et par suite

$$\cos\frac{\zeta_0+\zeta_1}{2}\cdot\cos\frac{\zeta_0-\zeta_1}{2} = \cos\alpha\cos\beta > 0,$$

donc sn a sera négatif. On trouvera ensuite

$$\operatorname{cn}^2 a = \frac{\sin\zeta_0\sin\zeta_1}{\cos^2\beta} > 0,$$

d'où

$$0 > \operatorname{sn} a > -1,$$

en sorte qu'il faudra prendre $a = -\sigma$, σ désignant un argument compris entre zéro et K. On aura, par suite,

$$\operatorname{cn} a = \frac{\sqrt{\sin\zeta_0\sin\zeta_1}}{\cos\beta}, \quad \operatorname{dn} a = \frac{\sqrt{\sin\zeta_0\sin\zeta_1}}{\sin\alpha\cos\beta}.$$

d'où, par des réductions faciles,

$$\frac{\sin\zeta_1}{k\sin\alpha\cos^2\beta\,\operatorname{cn} a\,\operatorname{dn} a} = \frac{1}{k\sin\zeta_0},$$

$$\frac{k\sin\zeta_0}{\sqrt{\mu}\cos\beta} = \omega_1\sin\zeta_0\operatorname{tg}\beta,$$

$$k\operatorname{sn}(a+\mathrm{K}) = \sin\beta, \qquad u - a = \rho t + \mathrm{K} + \sigma,$$

d'où enfin

$$(133)\quad \left\{\begin{array}{l} \varphi = \varphi_0 + (n + \omega_1 \sin\zeta_0 \operatorname{tg}\beta)\, t - \dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\dfrac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)}\rho t \\ \quad - \dfrac{1}{2\sqrt{\mu}} l.\left[\dfrac{\theta_3(\rho t - \sigma)}{\theta_3(\rho t + \sigma)}\cdot\dfrac{1 + \sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}{1 - \sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}\right], \end{array}\right.$$

l'argument σ étant déterminé par l'équation

$$\mathrm{sn}\,\sigma = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}.$$

70. Le cas I, *b*) est un cas *limite :* cos ζ s'exprime sous forme finie en fonction de *t*, l'axe Oζ s'approche indéfiniment de la position *asymptotique* OX.

Dans le cas I, *c*), où

$$n < -\omega_1 \sin^2\frac{\zeta_0}{2},$$

l'angle ζ varie périodiquement entre $+\zeta_0$ et $-\zeta_0$; *l'axe du tore oscille également de part et d'autre de la projection* OX *de la ligne boréale* (position d'équilibre stable). On pose

$$\alpha = \frac{\zeta_0}{2},\quad \cos^2\beta = \frac{f-1}{f-\cos\zeta_0} = 1 + \frac{\omega_1}{n}\sin^2\frac{\zeta_0}{2},$$

d'où

$$\sin\beta = \sin\alpha\sqrt{-\frac{\omega_1}{n}};$$

puis

$$(134)\quad \left\{\begin{array}{l} k = \dfrac{1 - \cos\alpha\cos\beta}{1 + \cos\alpha\cos\beta}, \\ \rho = \dfrac{\omega_1\sqrt{\mu}\sin\alpha}{\sin\beta}(1 + \cos\alpha\cos\beta) = (1 + \cos\alpha\cos\beta)\sqrt{-\mu\omega_1 n}, \end{array}\right.$$

et l'on a, au moyen des formules du n° 11,

$$(29)\quad \cos\zeta - \cos\zeta_0 = \sin\alpha\sin 2\alpha\,\frac{1 - \mathrm{sn}\,(\rho t + \mathrm{K})}{(\cos\alpha + \cos\beta) - (\cos\alpha - \cos\beta)\,\mathrm{sn}\,(\rho t + \mathrm{K})},$$

d'où, pour la durée de l'oscillation de l'axe du tore,

$$\tau = \frac{8K}{\rho} = \frac{8K}{(1+\cos\alpha\cos\beta)\sqrt{-\mu\omega_1 n}}.$$

71. L'équation (131) donnera ici

$$\varphi = \varphi_0 + nt + \frac{\omega_1}{\rho}\sin\alpha\sin 2\alpha \int_K^u \frac{1-\operatorname{sn} u}{(\cos\alpha+\cos\beta)-(\cos\alpha-\cos\beta)\operatorname{sn} u}\,du$$

$$= \varphi_0 + nt + \frac{\omega_1 \sin\alpha\sin 2\alpha}{\rho(\cos\alpha+\cos\beta)}(u-K) + \frac{2\omega_1\sin\alpha\sin 2\alpha\cos\beta}{k\rho(\cos\alpha+\cos\beta)^2 \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}$$

$$\left\{\frac{\vartheta'(a)}{\vartheta(a)}\rho t + \frac{1}{2}\mathrm{l}.\left[\frac{\vartheta(u-a)}{\vartheta(u+a)}\cdot\frac{1+k\operatorname{sn}(a+K)\operatorname{sn}(u+K)}{1-k\operatorname{sn}(a+K)\operatorname{sn}(u+K)}\right]\right\},$$

où l'on a posé

$$k\operatorname{sn} a = -\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{\cos\alpha+\cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Les angles α et β étant moindres que $\frac{1}{2}\pi$, sn a sera $\gtrless 0$ suivant que l'on aura

$$\alpha \gtrless \beta \quad \text{ou} \quad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \lessgtr 1,$$

ou enfin

$$-n \gtrless \omega_1.$$

Les deux cas sont possibles ; on doit donc regarder sn a comme pouvant être positif ou négatif, et comme on a d'ailleurs

$$\operatorname{cn}^2 a = \frac{4\cos\alpha\cos\beta\sin^2\alpha\sin^2\beta}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2(1-\cos\alpha\cos\beta)^2} > 0,$$

$$\operatorname{dn}^2 a = \frac{4\cos\alpha\cos\beta}{(\cos\alpha+\cos\beta)^2},$$

on conclut de là que sn a est moindre que l'unité, donc a est

réel et égal à $\pm\sigma$, σ étant un argument compris entre zéro et K. Par ces substitutions, on obtient, toutes réductions faites,

$$(135)\quad \begin{cases} \varphi = \varphi_0 + \left(n + \dfrac{\omega_1 \sin\alpha \sin 2\alpha}{\cos\alpha + \cos\beta}\right) t \pm \dfrac{1}{\sqrt{\mu}} \dfrac{\theta'(\sigma)}{\theta(\sigma)} \rho t \\ \quad + \dfrac{1}{2\sqrt{\mu}} \mathrm{l.} \left[\dfrac{\theta_2(\rho t \mp \sigma)}{\theta_2(\rho t \pm \sigma)} \cdot \dfrac{1 + \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}{1 + \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{sn}\,\rho t}\right]. \end{cases}$$

σ désigne un argument compris entre 0 et K, déterminé par l'équation

$$\mathrm{sn}\,\sigma = \pm \frac{n\cos\beta + \omega_1\cos\alpha}{n\cos\beta - \omega_1\cos\alpha},$$

le signe supérieur se rapportant à $-n > \omega_1$, le signe inférieur à $-n < \omega_1$.

Ce cas est celui des expériences de Foucault, quand la rotation du tore est de droite à gauche autour de Oζ; car n est alors négatif et très grand, tandis que ω_1 est très petit, en sorte que la condition I, *c*) est alors réalisée. Le cas I, *a*) est au contraire un cas idéal qui ne pourrait se présenter que sur une planète à rotation très rapide, et si l'on assignait au tore une vitesse initiale très faible.

72. Examinons le cas III), celui où n est > 0, la condition A) ou $n < \omega_1 \cos\zeta_0$ étant d'ailleurs supposée toujours remplie. C'est le cas étudié au n° 13. L'axe du tore oscille en restant du même côté de OX, l'angle ζ variant entre une limite *inférieure* ζ_0 et une limite *supérieure* ζ_1 fournie par l'équation

$$\cos\zeta_1 - \cos\zeta_0 = -\frac{2n}{\omega_1}.$$

Le mouvement de l'axe, la durée de l'oscillation sont donnés par des formules qui ne diffèrent pas de celles du n° 13 et qui sont d'ailleurs analogues à celles du cas I, *a*).

Dans l'hypothèse B), c'est-à-dire

$$n - \omega_1\cos\zeta_0 > 0,$$

qui conduit à une valeur négative de r, il faudra, comme on sait, compter l'angle ζ en sens contraire à partir du prolongement OX′ de OX, et l'on retombera sur des formules identiques à celles des cas précédents. Il n'y aurait aucun intérêt à développer les calculs se rapportant à cette hypothèse, et nous nous bornerons à signaler l'hypothèse C), savoir

$$n = \omega_1 \cos \zeta_0 .$$

La rotation initiale du disque autour de son axe de figure est précisément égale et de sens contraire à la composante, suivant cet axe, de la rotation de la planète.

C'est un cas analogue à celui du n° 19, et il donne lieu aux mêmes formules. Comme $l_1 = 0$, l'équation différentielle du mouvement se réduit à

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \mu\omega_1^2 (\cos^2 \zeta_0 - \cos^2 \zeta).$$

L'axe $O\zeta$ oscille à égale distance de part et d'autre de la perpendiculaire OY sur OX, ζ variant entre ζ_0 et $\pi - \zeta_0$. Si l'on pose

$$k = \pm \cos \zeta_0,$$

selon que $\cos \zeta_0$ est positif ou négatif, on trouve

$$\cos \zeta = \cos \zeta_0 \operatorname{sn} (\omega_1 t \sqrt{\mu} + K),$$

ou encore

$$\cos \zeta = \pm \sqrt{k} \frac{\theta_2 (\omega_1 t \sqrt{\mu})}{\theta_3 (\omega_1 t \sqrt{\mu})},$$

et la durée de l'oscillation complète de l'axe est

$$\tau = \frac{4K}{\omega_1 \sqrt{\mu}} = \frac{4K}{\omega \cos \lambda} \sqrt{\frac{A + C_1 + A_2}{C}}.$$

L'équation (127) se réduit ici à

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_1 \cos \zeta,$$

et l'on a

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_1 \int_0^t \cos\zeta\, dt = \varphi_0 + \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_K^u \cos\zeta\, du,$$

en posant

$$u = \omega_1 t \sqrt{\mu} + K.$$

Remplaçant $\cos\zeta$ par sa valeur ci-dessus, savoir

$$\cos\zeta = \cos\zeta_0 \operatorname{sn} u,$$

on aura, par un calcul semblable à celui du n° 25,

$$(136) \quad \ldots \quad \varphi = \varphi_0 + \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \operatorname{l.} \frac{1 + \cos\zeta_0 \operatorname{sn} \omega_1 t \sqrt{\mu}}{1 - \cos\zeta_0 \operatorname{sn} \omega_1 t \sqrt{\mu}}$$

Cette formule, qui fait connaître le mouvement de rotation du tore autour de son axe, offre cette particularité, à la différence des équations (132) et (135) où l'angle φ renferme un terme proportionnel au temps, qu'ici φ est purement une fonction périodique, dont la période est la même que celle de l'oscillation de l'axe du tore. Le tore ne fait donc qu'*osciller* autour de son axe de figure sans accomplir une rotation véritable.

§ XVI.

GYROSCOPE DE FOUCAULT (*suite*).

73. PROBLÈME X. — *L'axe* OZ *de l'anneau extérieur* (fig. 21) *étant fixe par rapport à la planète, l'anneau intérieur* I *est fixé à l'anneau* E *sous un angle invariable* θ, *de sorte que l'axe* Oζ *du tore ne peut se mouvoir que sur un cône de révolution autour de l'axe* OZ, θ *étant le demi-angle d'ouverture du cône. Le tore est*

mis en rotation autour de son axe de figure maintenu immobile; déterminer le mouvement de son axe et sa rotation autour de cet axe.

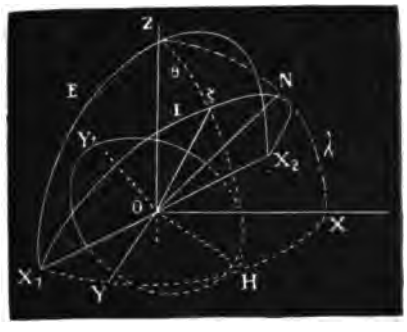


Fig. 21.

Ce problème est une généralisation du précédent, où θ était égal à $\frac{\pi}{2}$. Comme θ est constant, θ' est nul, et l'on n'a à considérer que deux fonctions du temps, ψ et φ. La formule (94) devient ici

$$T + V = \tfrac{1}{2}\left[(a' + b\sin^2\theta)\psi'^2 + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)^2\right] - \omega\left[(a' + b\sin^2\theta)\psi'\sin\lambda - b\psi'\cos\lambda\sin\theta\cos\theta\sin\psi + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\gamma_2\right].$$

Si l'on applique l'équation (93), en prenant successivement $q = \varphi$, $q = \psi$, on trouvera sans peine

$$\frac{d}{dt}(\varphi' + \psi'\cos\theta - \omega\cos\gamma_2) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[(a' + b\sin^2\theta)\psi' + C(\varphi' + \psi'\cos\theta)\cos\theta - \omega(a' + b\sin^2\theta)\sin\lambda + \omega b\cos\lambda\sin\theta\cos\theta\sin\psi - C\omega\cos\theta\cos\gamma_2\right] - b\omega\psi'\cos\lambda\sin\theta\cos\theta\cos\psi + C\omega(\varphi' + \psi'\cos\theta)\frac{\partial\cos\gamma_2}{\partial\psi} = 0.$$

L'intégration de la première de ces équations donne

$$(137) \quad \ldots \quad \varphi' + \psi'\cos\theta = l_1 + \omega\cos\gamma_2,$$

l_1 étant une constante arbitraire. Substituant cette valeur dans la seconde équation ci-dessus, observant que

$$\omega(a' + b\sin^2\theta)\sin\lambda$$

est constant et faisant les réductions, on trouve

$$(138)\qquad (a' + b\sin^2\theta)\frac{d\psi'}{dt} + C\omega(l_1 + \omega\cos\gamma_3)\frac{\partial.\cos\gamma_2}{\partial\psi} = 0.$$

Tirons d'abord de là les conditions de l'équilibre relatif de l'axe $O\zeta$. Comme on a, pour $t = 0$, $\varphi' = n$ et $\psi' = 0$, la constante l_1 a pour valeur

$$l_1 = n - \omega\cos\gamma_{30},$$

et, d'autre part, l'expression de $\cos\gamma_2$ fournie par les équations (55) conduit à

$$\frac{\partial.\cos\gamma_2}{\partial\psi} = \cos\lambda\,\sin\theta\cos\psi.$$

L'équation (138) devient ainsi, pour $t = 0$,

$$\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)_0 = -\frac{C\omega n\cos\lambda\,\sin\theta\cos\psi_0}{a' + b\sin^2\theta}.$$

Pour l'équilibre, il faut que le second membre soit nul, ce qui suppose 1° ou bien que l'on ait $n = 0$, c'est-à-dire que le tore n'ait reçu aucune rotation initiale; 2° ou bien que $\cos\psi_0$ soit nul, c'est-à-dire que l'angle ψ_0 soit égal à 90° ou à 270° : *l'axe du tore est alors dans le plan passant par la ligne boréale* ON *et par l'axe* OZ *de l'anneau extérieur*. En d'autres termes, il fait avec ON le plus petit ou le plus grand angle que comporte son mouvement sur le cône de révolution. L'une de ces positions se rapporte à l'équilibre stable, l'autre à l'équilibre instable, ce qui dépend du signe de n, ainsi que le montrera la discussion du mouvement.

74. Pour obtenir l'intégrale de l'équation (138) sous la forme

qui convient le mieux à la solution du problème, remplaçons $l_1 + \omega \cos \gamma_2$ par sa valeur

$$n + \omega (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_{20}) = n + \omega \cos \lambda \sin \theta (\sin \psi - \sin \psi_0),$$

d'après (55). Mettons aussi pour

$$\frac{\partial . \cos \gamma_2}{\partial \psi}$$

sa valeur ci-dessus. Nous aurons

$$(a' + b \sin^2 \theta) \frac{d\psi'}{dt} + C\omega \left[n + \omega \cos \lambda \sin \theta (\sin \psi - \sin \psi_0) \right] \cos \lambda \sin \theta \cos \psi = 0.$$

Introduisons, au lieu de l'angle ψ, l'angle ζ que fait, avec la direction OX définie précédemment, la projection OH de l'axe du tore sur le plan normal à OZ, ζ étant compté positivement de OX vers OY. On aura donc

$$\psi = \zeta + \frac{\pi}{2}, \quad \psi' = \zeta',$$

et notre équation prendra la forme

$$\frac{d\zeta'}{dt} = \frac{C\omega \left[n + \omega \cos \lambda \sin \theta (\cos \zeta - \cos \zeta_0) \right] \cos \lambda \sin \theta \sin \zeta}{a' + b \sin^2 \theta}.$$

Cette équation s'intègre sans peine, et donne, ζ' étant nul pour $\zeta = \zeta_0$,

$$\zeta'^2 = - \frac{(\cos \zeta - \cos \zeta_0) \left[2C\omega n \cos \lambda \sin \theta + C\omega^2 \cos^2 \lambda \sin^2 \theta (\cos \zeta - \cos \zeta_0) \right]}{a' + b \sin^2 \theta},$$

ou encore

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{C\omega^2 \cos^2\lambda \sin^2\theta}{a' + b\sin^2\theta}(\cos\zeta - \cos\zeta_0)\left(-\frac{2n}{\omega\cos\lambda\sin\theta} + \cos\zeta_0 - \cos\zeta\right).$$

Cette équation rentre encore dans le type de l'équation (11). Il suffit de poser

$$\omega'^2 = \frac{C\omega^2\cos^2\lambda\sin^2\theta}{a' + b\sin^2\theta},$$

$$\frac{2g}{r\omega'^2} = -\frac{2n}{\omega\cos\lambda\sin\theta} + 2\cos\zeta_0,$$

d'où l'on tire

$$(139)\quad \begin{cases} \omega' = \omega\cos\lambda\sin\theta\sqrt{\dfrac{C}{a' + b\sin^2\theta}}, \\ r = -\dfrac{g(a' + b\sin^2\theta)}{C\omega\cos\lambda\sin\theta(n - \omega\cos\lambda\sin\theta\cos\zeta_0)}. \end{cases}$$

Le mouvement, sur le plan XY, de la projection de l'axe peut donc être regardé comme connu, par le théorème suivant : *Lorsque l'axe du gyroscope ne peut se mouvoir que sur un cône de révolution autour de l'axe* OZ *de l'anneau extérieur, sa projection sur un plan normal à* OZ *oscille, par rapport à la projection de la ligne boréale sur ce plan, comme un pendule simple dont le plan tournerait autour de la verticale de suspension avec une vîtesse angulaire constante, cette vitesse* ω' *et la longueur* r *du pendule étant définies par les deux équations* (139).

La direction de la pesanteur dans le pendule de comparaison, et par conséquent la position d'équilibre stable de la projection OH de Oζ, coïncide avec OX ou avec son prolongement OX', d'après une remarque déjà faite, suivant que r est positif ou négatif, c'est-à-dire suivant que la quantité

$$n - \omega\cos\lambda\sin\theta\cos\zeta_0$$

est négative ou positive.

La discussion du mouvement de l'axe Oζ n'offre plus aucune difficulté, puisque nous sommes ramenés à un problème déjà traité. Mais on simplifiera encore en posant

$$\omega_1 = \omega \cos\lambda \sin\theta,$$

$$\mu = \frac{C}{a' + b\sin^2\theta} = \frac{C}{A_1 + A_2 + (A + C_1 - A_1)\sin^2\theta},$$

car l'équation différentielle du mouvement et les formules (139) se réduiront alors respectivement à

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \mu\omega_1^2(\cos\zeta - \cos\zeta_0)\left(-\frac{2n}{\omega_1} + \cos\zeta_0 - \cos\zeta\right),$$

$$\omega' = \omega_1\sqrt{\mu},$$

$$r = -\frac{g}{\mu\omega_1(n - \omega_1\cos\zeta_0)},$$

et nous serons ramenés à des formules qui ne diffèrent plus de celles du n° 66, qui se rapportent au problème précédent, que par la signification des lettres μ et ω_1. Dès lors, les conséquences et les formules que nous avons obtenues pour le mouvement de l'axe du tore dans son plan directeur s'appliqueront, sans autre changement que celui-là, au mouvement de la projection OH de l'axe du tore sur le plan XY, normal à l'axe de rotation de l'anneau E. Il est donc inutile de reproduire cette discussion, qui comporterait les mêmes cas et les mêmes conséquences que la précédente. Nous nous bornons à remarquer

1° Que si r est positif, ou si l'on a

$$n - \omega_1\cos\zeta_0 < 0,$$

la quantité désignée par f dans la théorie du pendule sera égale à

$$-\frac{2n}{\omega_1} + \cos\zeta_0,$$

et que les trois cas

$$f - \cos\zeta_0 > 0, \quad = 0, \quad < 0,$$

correspondront ici encore à

$$n < 0, \quad n = 0, \quad n > 0,$$

c'est-à-dire aux différents sens de la rotation initiale du tore autour de son axe;

2° Que dans le cas de $n < 0$, il y aura encore à distinguer les cas où f sera < 1 ou > 1, *attendu que dans le premier cas l'axe du gyroscope oscillera en restant toujours du même côté de sa position d'équilibre, tandis que dans le second, il exécutera des oscillations égales de part et d'autre de cette position.*

Les formules du mouvement de la projection de $O\zeta$ sur le plan XY sont contenues dans les équations des numéros 67 et 68 du § précédent.

Le mouvement de rotation du disque, par rapport à l'anneau intérieur, est déterminé par l'équation (137), que l'on met aisément sous la forme

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos\theta \frac{d\zeta}{dt} + \omega(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_{20}),$$

ou

$$\frac{d\varphi}{dt} = n - \cos\theta \frac{d\zeta}{dt} + \omega_1(\cos\zeta - \cos\zeta_0).$$

On en déduira par l'intégration, et en posant comme dans les autres problèmes

$$u = \rho t + K,$$

l'équation

$$(140) \quad \varphi = \varphi_0 + nt - (\zeta - \zeta_0)\cos\vartheta + \frac{\omega_1}{\rho} \int^u (\cos\zeta - \cos\zeta_0) du.$$

La valeur de $\cos\zeta - \cos\zeta_0$ est donnée en fonction de l'argument u par les formules du mouvement de l'axe (n^os 67, 68, 69), la constante ρ ayant, dans chaque cas du problème, la signification particulière qui ressort de ces formules. Il en résulte que l'intégrale qui figure dans l'équation (140) s'obtiendra explicitement par les formules des n^os 70, 71, 72. Quant au terme

$$(\zeta - \zeta_0)\cos\theta,$$

il peut être regardé comme suffisamment connu, puisque ζ est une fonction actuellement connue du temps.

QUATRIÈME PARTIE

Mouvements apparents à la surface d'une planète lorsque la pesanteur intervient.

---

§ XVII.

PENDULE GYROSCOPIQUE.

75. Problème XI. — Considérons encore un pendule OA (fig. 22) composé d'un tore D tournant autour de son axe de figure Aζ et d'une chape E qui porte cet axe et qui est elle-même suspendue par une tige à un axe horizontal *ab* fixe par rapport à la planète, autour duquel elle peut osciller librement. Ce pendule satisfait aux mêmes conditions de construction qu'au n° 41 ; seulement, la planète représente ici le bâti tournant Σ, α désigne l'angle que fait le plan d'oscillation XOZ' du pendule avec le plan X_1OZ' du méridien, angle que l'on peut faire varier d'une expérience à une autre ; $L = NOX_1$ est la latitude du lieu de l'observation, ζ l'angle Z'OA compris entre la nadirale OZ' du milieu de l'axe *ab* et l'axe OA du pendule : cet angle est compté positivement de OZ' vers OX. Conservant d'ailleurs les mêmes notations qu'au n° 41, nous aurons encore ici les égalités

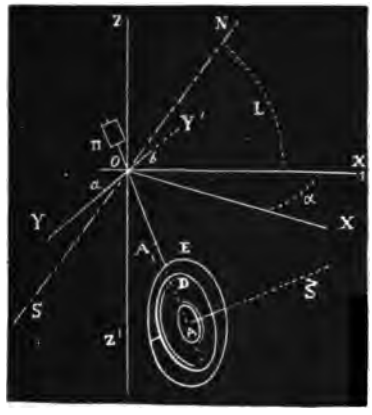


Fig. 22.

$$M = m + m_1, \qquad M\rho = ma + m_1a_1,$$
$$H_1 = ma^2 + m_1a_1^2 + A + A_1,$$

H_1 étant toujours le moment d'inertie du pendule complet (tore, chape, tige) par rapport à son axe de suspension *ab* ou OY.

Supposons que, la chape étant maintenue immobile sous une inclinaison quelconque ζ_0, on imprime au tore une rotation initiale n autour de l'axe $A\zeta$, dans un sens déterminé par le signe de n, puis, que l'on abandonne le pendule à lui-même. Cherchons le mouvement apparent que prendra le système.

Nous devons ici faire usage de l'équation

$$(92) \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+V)}{\partial q'} - \frac{\partial(T+V)}{\partial q} = Mg\frac{\partial.\rho\cos\overline{\rho g}}{\partial q}.$$

L'expression de T se calcule sans difficulté, comme au n° 41, et l'on trouve

$$T = \tfrac{1}{2}(H_1\zeta'^2 + C_\varphi'^2).$$

Pour déterminer V, nous désignerons par u l'angle $\overline{\zeta N}$ que fait l'axe $A\zeta$ du tore avec la ligne boréale ON, et nous observerons que le mouvement relatif du tore D se compose d'une rotation φ' autour de l'axe principal $A\zeta$ par rapport auquel son moment d'inertie est C, et d'une rotation ζ' autour *du prolongement* OY′ de OY, par rapport auquel son moment est $ma^2 + A$. Donc, l'axe instantané du système de comparaison étant OS, prolongement de ON, on a, *pour le tore seul*,

$$V = \omega\left[(ma^2 + A)\zeta'\cos\overline{YN} - C_\varphi'\cos u\right].$$

Pour la chape, qui tourne autour de OY′ avec une vitesse ζ', on a

$$V = \omega(m_1a_1^2 + A_1)\zeta'\cos\overline{YN},$$

donc, pour le pendule tout entier,

$$V = \omega(H_1\zeta'\cos\overline{YN} - C_\varphi'\cos u),$$

d'où, remplaçant $\cos\overline{YN}$ par sa valeur qui est évidemment

$$\cos YN = -\cos L\sin\alpha,$$

on tire

$$(141)\quad T + V = \tfrac{1}{2}(H_1\zeta'^2 + C\varphi'^2) - \omega(H_1\zeta' \cos L \sin\alpha + C\varphi' \cos u).$$

On trouve sans peine

$$(142)\quad \ldots \cos u = \sin L \sin\zeta + \cos L \cos\alpha \cos\zeta,$$

et, en désignant par v l'angle que fait l'axe OA du pendule avec ON,

$$(143)\quad \ldots \cos v = -\sin L \cos\zeta + \cos L \cos\alpha \sin\zeta,$$

d'où résulte cette relation utile

$$\cos v = -\frac{d.\cos u}{d\zeta}.$$

D'ailleurs, il est évident que

$$\cos\overline{\rho g} = \cos\zeta;$$

donc, en appliquant l'équation (92) et faisant successivement $q = \varphi$, $q = \zeta$, nous obtiendrons

$$C\frac{d}{dt}(\varphi' - \omega\cos u) = 0,$$

$$H_1\frac{d}{dt}(\zeta' - \omega\cos L\sin\alpha) + C\omega\varphi'\frac{d.\cos u}{d\zeta} = -Mg\rho\sin\zeta.$$

La première équation donne, par l'intégration,

$$(144)\quad \ldots \varphi' = l_1 + \omega\cos u,$$

l_1 étant une constante qui s'exprime, au moyen de la vitesse initiale n du tore, par l'équation

$$(145)\quad \ldots l_1 = n - \omega\cos u.$$

La seconde se réduit, comme on le voit facilement, à

$$(146) \quad . \quad . \quad H_1 \frac{d\zeta'}{dt} = C\omega (l_1 + \omega \cos u) \cos v - Mg\rho \sin \zeta,$$

équation que nous intégrerons plus loin, après avoir établi les conditions de l'équilibre apparent du pendule.

76. Pour que la droite OA conserve son inclinaison initiale ζ_0, il faut que $\frac{d\zeta'}{dt}$ soit nul pour $t = 0$ ou $\zeta = \zeta_0$.

Comme on a, à cet instant,

$$l_1 + \omega \cos u_0 = n,$$

$$\cos v_0 = - \sin L \cos \zeta_0 + \cos L \cos \alpha \sin \zeta_0,$$

si l'on fait ces substitutions dans l'équation (146) et si l'on désigne par E la valeur de ζ_0 qui correspond à une position d'équilibre du pendule, on a, pour déterminer l'angle E, l'égalité

$$C\omega n (\cos L \cos \alpha \sin E - \sin L \cos E) - Mg\rho \sin E = 0,$$

d'où l'on déduit

$$(147) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg} E = \frac{C\omega n \sin L}{C\omega n \cos L \cos \alpha - Mg\rho}.$$

Il résulte de cette équation que le pendule admet seulement *deux* positions d'équilibre, diamétralement opposées l'une à l'autre, comme répondant à une même valeur de tg E. L'une de ces positions donne l'équilibre stable, l'autre l'équilibre instable, et la distinction en est facile; mais comme nous discuterons en détail cette question dans l'étude du problème suivant, qui offre un plus grand intérêt, nous nous bornerons à indiquer ici les résultats les plus saillants de cette discussion, pour le cas des mouvements à la surface de la terre.

1° Lorsque $n = 0$, tg E s'évanouit, l'axe OA du pendule est donc en équilibre relatif dans la position verticale.

2° Lorsque, au contraire, n a une valeur assez considérable, une rotation énergique ayant été imprimée au tore dans un sens ou dans l'autre, l'angle E ne sera plus égal à zéro (sauf à l'équateur où l'on a sin L = 0); mais comme la vitesse angulaire ω a une valeur très petite (0,000073) pour le globe terrestre, le produit $n\omega$ restera nécessairement très petit, et vis-à-vis de $Mg\rho$ les termes $C\omega n \cos L \cos \alpha$, $C\omega n \sin L$ auront des valeurs très faibles; la valeur de tg E différera donc très peu de celle que donne l'équation

$$\operatorname{tg} E = -\frac{C\omega n \sin L}{Mg\rho},$$

la position d'équilibre stable étant d'ailleurs celle qui fait un angle aigu avec OZ'.

Il en résulte que, si n est *négatif*, ou si la rotation initiale est dextrogyre relativement à $A\zeta$, l'angle E sera positif, le pendule déviera de la verticale vers la direction OX pour que l'équilibre ait lieu. Si n est positif ou la rotation initiale lévogyre par rapport à $A\zeta$, le pendule s'écartera de la verticale dans le sens contraire, vers OX'.

Dans les deux cas, l'écart sera d'un très petit angle, mesuré sensiblement par le second membre de l'équation ci-dessus.

Un pendule gyroscopique de M. Sire, monté comme nous l'avons indiqué ci-dessus, et dont le tore aurait reçu une rotation initiale extrêmement rapide, manifesterait donc la rotation terrestre par ce phénomène curieux, que sa position d'équilibre stable ferait un petit angle avec la verticale, dans un sens ou dans l'autre, suivant le sens de la rotation initiale imprimée au tore.

3° Si l'on conçoit que la valeur n devienne excessivement considérable, ou que la rotation ω de la planète acquière une valeur notablement supérieure à celle qui convient au globe terrestre, ou encore que la tige OA de la chape porte au delà de O un prolongement muni d'un contre-poids H, à l'aide duquel on puisse déplacer le centre de gravité du pendule et l'amener dans le voisinage du point O, de façon que ρ devienne une

quantité très petite, les trois termes qui entrent dans l'expression de tg E (éq. 147) pourront acquérir des valeurs comparables, et il faudra, dans ce cas, faire porter la discussion sur l'équation (147) elle-même. On aura à considérer les trois cas

$$C\omega n \cos L \cos \alpha - Mg\rho < 0,$$
$$C\omega n \cos L \cos \alpha - Mg\rho = 0,$$
$$C\omega n \cos L \cos \alpha - Mg\rho > 0,$$

le premier cas ayant toujours lieu si n est négatif et α inférieur à $\frac{\pi}{2}$. Dans le deuxième cas, tg E serait infini et la position d'équilibre du pendule serait *horizontale*. Si ρ est nul, ce qui aura lieu si le centre de gravité du pendule est amené exactement au point O, on aura

$$\operatorname{tg} E = \frac{\operatorname{tg} L}{\cos \alpha},$$

et la position d'équilibre sera perpendiculaire à la projection de la ligne boréale ON sur le plan d'oscillation XOZ'. Mais ces différents cas seront discutés plus en détail dans le problème suivant.

77. Pour effectuer commodément l'intégration de l'équation (146), projetons la ligne boréale ON sur le plan d'oscillation en ON_1 (fig. 23), et nommons ξ l'angle que fait avec ON_1 une parallèle $O\xi$ à l'axe $A\zeta$, menée par le point O : $O\xi$ est donc perpendiculaire à OA, et l'angle ξ sera compté positivement de ON_1 vers OX. Soient, en outre, τ l'angle NON_1, ε l'inclinaison N_1OX de la droite ON_1 sur l'horizontale. On a évidemment les relations

Fig. 23.

$$\zeta = \varepsilon - \xi, \quad u = \overline{N\xi}, \quad \zeta' = -\xi',$$
$$\cos u = \cos \tau \cos \xi, \quad \cos v = -\cos \tau \sin \xi,$$

et l'équation (146) devient

$$H_1 \frac{d\xi'}{dt} = C\omega (l_1 + \omega \cos\tau \cos\xi) \cos\tau \sin\xi + Mg\rho \sin(\xi - \varepsilon),$$

ou, en développant,

$$\frac{d\xi'}{dt} = \frac{C\omega^2 \cos^2\tau}{H_1} \sin\xi \cos\xi + \frac{C\omega l_1 \cos\tau + Mg\rho \cos\varepsilon}{H_1} \sin\xi - \frac{Mg\rho \sin\varepsilon}{H_1} \cos\xi.$$

L'intégration de cette équation est facile, mais inutile, car il suffit, pour identifier cette équation avec l'équation (77) du mouvement d'un point pesant sur un cercle vertical tournant, de remplacer ξ par ζ et de poser

$$\omega'^2 = \frac{C\omega^2 \cos^2\tau}{H_1},$$

$$\frac{g}{r} = -\frac{C\omega l_1 \cos\tau + Mg\rho \cos\varepsilon}{H_1},$$

$$\frac{\omega'^2 \Delta}{r} = \frac{Mg\rho \sin\varepsilon}{H_1},$$

d'où l'on déduira, pour les éléments du pendule de comparaison,

$$(148) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega' = \omega \cos\tau \sqrt{\dfrac{C}{H_1}}, \\ r = -\dfrac{gH_1}{C\omega l_1 \cos\tau + Mg\rho \cos\varepsilon}, \\ \Delta = -\dfrac{g^2 M H_1 \rho \sin\varepsilon}{C\omega^2 \cos^2\tau (Mg\rho \cos\varepsilon + C\omega l_1 \cos\tau)}. \end{array} \right.$$

La question du mouvement du pendule, lorsqu'il n'est pas dans une position d'équilibre relatif, est donc résolue par ce théorème : *Si le pendule gyroscopique est écarté d'une position d'équilibre stable, à la surface d'une planète en rotation uniforme,*

la perpendiculaire à l'axe OA *du pendule oscillera, par rapport à la projection de la ligne boréale sur le plan d'oscillation, comme le ferait par rapport à la verticale un pendule simple, dont le plan d'oscillation tournerait avec une vitesse constante* ω' *autour d'un axe vertical* ST *situé dans ce plan, la longueur* r *du pendule, la vitesse* ω' *et la distance* Δ *du point de suspension à l'axe* ST *étant déterminées par les formules* (148).

La valeur de ξ, et par conséquent de ζ, étant connue en fonction du temps, on en déduirait celle de φ au moyen de l'équation (144).

§ XVIII.

BAROGYROSCOPE.

78. Dans le pendule gyroscopique décrit ci-dessus, les conditions expérimentales sont défavorables, et une vitesse rotatoire énorme serait nécessaire pour que la rotation terrestre s'accusât d'une façon appréciable. La valeur de tg E, donnée par l'équation (147), ne saurait être en effet que très petite, $C\omega n$ étant très petit par rapport à $Mg\rho$; la position d'équilibre du pendule ne ferait avec la verticale qu'un angle de quelques minutes, dans les conditions ordinaires. En outre, à cause de la valeur considérable de H_1, les oscillations du pendule de part et d'autre de sa position d'équilibre seraient excessivement lentes, et par suite, la force directrice serait masquée par les plus faibles résistances.

Il convient donc de chercher une disposition plus favorable pour rendre sensible l'influence de la rotation terrestre sur la position d'équilibre d'un pendule gyroscopique, et la suivante nous paraît satisfaire à cette condition.

79. Problème XII. — *Supposons* (fig. 24) *qu'un tore* D *tourne rapidement sur son axe* $O\zeta$, *porté par une chape* E *mobile autour de la ligne horizontale* ab *perpendiculaire à* $O\zeta$. *Le centre de gravité commun du tore et de la chape est en* O,

milieu de ab. *La chape porte, sur une aiguille formant le prolongement inférieur de l'axe* Oζ, *un petit curseur* μ, *moyennant lequel, le tore étant au repos, l'appareil sera en équilibre stable lorsque l'axe* Oζ *sera vertical. Déterminer, pour une vitesse de rotation initiale* n *donnée au tore* 1° *quelle serait la position d'équilibre relatif de l'aiguille* Oμ; 2° *quel serait le mouvement du système entier, sur une planète en rotation uniforme.*

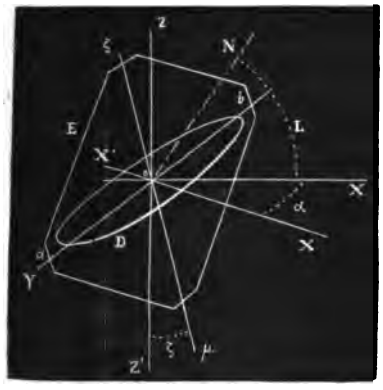


Fig. 24.

Soient ZOZ′ la verticale du centre de figure O du tore, X_1OZ le plan du méridien, ON la ligne boréale; XOZ′ le plan d'oscillation du *pendule* Oμ, α l'angle (moindre que 180°) que ce plan fait avec X_1OZ', cet angle compté positivement à partir de OX_1, de gauche à droite par rapport à OZ; OX l'horizontale dans le plan d'oscillation; OY ou *ba* la direction normale à XOZ; ζ l'angle μOZ′ du pendule avec la nadirale OZ′, compté positivement de OZ′ vers OX; C et A les moments d'inertie axial et équatorial du tore, relatifs au point O; A_1 le moment d'inertie de la chape par rapport à *ab*, et nous supposons que la chape satisfasse à cette condition, que *ab* soit un axe principal d'inertie pour le point O. Soient enfin φ l'angle qui mesure la rotation du tore par rapport à la chape, μ la masse du curseur, δ la distance de son centre de gravité au point O.

Nous devons appliquer encore l'équation (92). Le mouvement relatif du tore se compose de deux rotations, l'une dont la vitesse est φ′ autour de Oζ, l'autre de vitesse ζ′ autour du prolongement de OY; on a donc, pour le tore seul, *u* désignant l'angle que Oζ fait avec ON,

$$T = \tfrac{1}{2}(A\zeta'^2 + C\varphi'^2),$$

$$V = \omega(A\zeta' \cos \overline{YN} - C\varphi' \cos u),$$

et pour la chape avec le petit pendule, qui n'ont qu'une simple rotation ζ' autour du prolongement de OY,

$$T = \tfrac{1}{2}(A_1 + \mu\delta^2)\zeta'^2,$$

$$V = \omega(A_1 + \mu\delta^2)\cos\overline{YN}$$

Soit donc

$$H_1 = A + A_1 + \mu\delta^2$$

le moment d'inertie du système mobile entier par rapport à l'axe de suspension ab; comme l'on a

$$\cos\overline{YN} = -\sin\alpha\cos L,$$

$$\cos u = \sin L\cos\zeta - \cos\alpha\cos L\sin\zeta,$$

on aura pour le système mobile tout entier

$$T + V = \tfrac{1}{2}(H_1\zeta'^2 + C\varphi'^2) - \omega(H_1\zeta'\cos L\sin\alpha + C\varphi'\cos u).$$

D'ailleurs, le centre de gravité du tore et de la chape étant en O, on a simplement ici

$$M\rho\cos\overline{\rho g} = \mu\delta\cos\zeta.$$

L'équation (92) nous donnera donc, successivement,

$$\frac{d}{dt}(C\varphi' - C\omega\cos u) = 0,$$

d'où

(149) . . . . . $\varphi' = l_1 + \omega\cos u,$

la valeur de la constante l_1 étant donnée par l'équation

(150) . . . . . $l_1 = n - \omega\cos u_0.$

Ensuite

$$\frac{d}{dt}(H_1\zeta' - H_1\omega\cos L\sin\alpha) + C\omega\varphi'\frac{d.\cos u}{d\zeta} = -\mu g\delta\sin\zeta,$$

ou, en remplaçant φ' par sa valeur ci-dessus,

$$(151) \qquad H_1 \frac{d\zeta'}{dt} = - C\omega (l_1 + \omega \cos u \frac{d.\cos u}{d\zeta} - \mu g \delta \sin \zeta,$$

équation dans laquelle on observera que

$$(152) \quad . \quad . \quad \frac{d.\cos u}{d\zeta} = - \sin L \sin \zeta - \cos L \cos \alpha \cos \zeta.$$

80. Désignons par E la valeur de l'angle ζ qui répond à une position d'équilibre de l'aiguille $O\mu$. Il faut qu'en faisant dans l'équation (151) $t = 0$, $\zeta = E$, on ait

$$\left(\frac{d\zeta'}{dt}\right)_0 = 0.$$

Observant que l'on a d'ailleurs

$$l_1 + \omega \cos u_0 = n$$

et ayant égard à l'équation (152), on trouvera l'équation de condition

$$C\omega n (\sin L \sin E + \cos L \cos \alpha \cos E) - g\mu\delta \sin E = 0,$$

de laquelle on tire

$$(153) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \operatorname{tg} E = \frac{C\omega n \cos L \cos \alpha}{g\mu\delta - C\omega n \sin L}.$$

Cette équation détermine *deux* valeurs de l'angle E, différant l'une de l'autre de 180°, auxquelles correspondent deux positions d'équilibre relatif de l'aiguille. Pour reconnaître celle qui donne l'équilibre stable, il convient d'intégrer l'équation (151), mise, au moyen des équations (150) et (152), sous la forme

$$H_1 \frac{d\zeta'}{dt} = C\omega n (\sin L \sin \zeta + \cos \alpha \cos L \cos \zeta)$$
$$- C\omega^2 (\cos u - \cos u_0) \frac{d.\cos u}{d\zeta} - g\mu\delta \sin \zeta.$$

Posons, en vertu de l'équation (153),

$$(154)\quad \left\{\begin{array}{l} g\mu\delta - C\omega n \sin L = F\cos E, \\ C\omega n \cos L \cos\alpha = F \sin E. \end{array}\right.$$

F désignant une quantité *positive*. Ces relations détermineront d'une manière complète la constante F et l'angle E. L'équation ci-dessus deviendra, par ces substitutions,

$$H_1 \frac{d\zeta'}{dt} = -C\omega^2(\cos u - \cos u_0)\frac{d.\cos u}{d\zeta} - F\sin(\zeta - E).$$

d'où, intégrant et observant que pour $t = 0$ on a $\zeta = \zeta_0$, $u = u_0$, $\zeta' = 0$, nous trouverons

$$(155)\quad H_1 \frac{d\zeta^2}{dt^2} = -C\omega^2(\cos u - \cos u_0)^2 + 2F\left[\cos(\zeta - E) - \cos(\zeta_0 - E)\right].$$

Le premier membre étant nécessairement positif et le premier terme du second négatif, il faut évidemment que, dans tous les cas, F étant > 0, on ait

$$\cos(\zeta - E) - \cos(\zeta_0 - E) > 0,$$

c'est-à-dire que l'angle $\zeta - E$ sera toujours plus rapproché de zéro que l'angle $\zeta_0 - E$. Or, $\zeta - E$ est l'angle que fait l'aiguille $O\mu$ avec la position d'équilibre définie par les équations (154). On en conclut donc que, *quelles que soient les données initiales, la position d'équilibre stable du petit pendule est toujours celle qui répond à l'angle* E *défini par les équations* (154).

Examinons maintenant les différents cas.

81. I. L'angle α ayant une valeur donnée, que nous supposerons comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, de façon que $\cos\alpha$ soit > 0, supposons d'abord que l'on ait

$$g\mu\delta - C\omega n \sin L > 0,$$

condition qui sera remplie pour toutes les valeurs négatives de n depuis $-\infty$ jusqu'à zéro, et pour toutes ses valeurs positives jusqu'à

$$n = \frac{g\mu\delta}{C\omega \sin L}.$$

D'après les relations (154), cos E sera positif, *l'aiguille en équilibre stable fera donc un angle aigu avec la nadirale* OZ', et comme sin E sera de même signe que n, *cet angle sera négatif, nul ou positif* suivant que n sera négatif, nul ou positif. Il variera depuis l'angle donné par l'équation

$$\text{tg } E = -\cot L \cos \alpha$$

jusqu'à zéro, pendant que n variera de $-\infty$ à zéro; et depuis $E = 0$ jusqu'à $E = \frac{\pi}{2}$, n variant de zéro à

$$n = \frac{g\mu\delta}{C\omega \sin L}.$$

En d'autres termes, pour ces valeurs successives de n, la position d'équilibre stable de l'aiguille variera depuis la projection de la ligne australe OS sur le plan d'oscillation jusqu'à l'horizontale OX, en passant par la nadirale OZ'. *Elle s'inclinera sur la nadirale dans le sens* OX' *ou dans le sens* OX, *suivant que la rotation initiale du tore sera de droite à gauche ou de gauche à droite par rapport à l'axe* Oζ.

II. Lorsque l'on aura

$$n = \frac{g\mu\delta}{C\omega \sin L},$$

les équations (154) donneront

$$\cos E = 0, \quad \sin E = +1,$$

la position d'équilibre stable du pendule sera l'horizontale OX.

III. Enfin, si l'on suppose

$$g\mu\delta - C\omega n \sin L < 0,$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs positives de n, on aura

$$\cos E < 0, \quad \sin E > 0,$$

l'angle E sera compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, la position d'équilibre stable du pendule se trouvera dans l'angle XOZ, *au-dessus de l'horizontale,* et cette position s'approchera, pour des valeurs positives et indéfiniment croissantes de n, de la direction-limite ON_1 définie par l'équation

$$\operatorname{tg} E = -\cot L \cos \alpha,$$

direction qui n'est autre que celle de la projection de la ligne boréale ON sur le plan d'oscillation.

IV. Observons que si l'on avait $\delta = 0$ ou $\mu = 0$, c'est-à-dire si le centre de gravité du système mobile coïncidait avec le point O, on aurait toujours

$$\operatorname{tg} E = -\cot L \cos \alpha,$$

et la position d'équilibre de l'axe du tore serait toujours suivant la droite N_1OS_1, dans le sens OS_1 ou ON_1 suivant que n serait négatif ou positif. Ce cas particulier est celui des expériences de Foucault, et ce résultat s'accorde avec ceux que Foucault a obtenus.

Si l'on avait $n = 0$ ou $\omega = 0$, en d'autres termes, si le tore était sans vitesse initiale ou la planète sans rotation, la formule donnerait toujours $\operatorname{tg} E = 0$, et l'aiguille aurait sa direction d'équilibre dans la verticale.

V. Comme, pour la terre, la valeur de ω est très petite, le terme $C\omega n \sin L$ aura toujours une valeur très faible, à moins que n ne soit excessivement grand; donc, à moins que le produit $g\mu\delta$ n'ait lui-même une valeur fort petite, tg E sera très

petit et l'équation (153) pourra être remplacée approximativement par

$$E = \frac{C\omega n \cos L \cos \alpha}{g\mu\delta}.$$

VI. Nous avons raisonné pour une valeur donnée de α, comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$; examinons l'influence des diverses valeurs de α.

Lorsque l'axe de suspension *ab* est perpendiculaire au plan du méridien X_1OZ, le plan d'oscillation XOZ coïncide avec ce dernier, $\cos \alpha = 1$ acquiert sa valeur maximum. D'après la formule (153), la déviation de l'aiguille par rapport à la verticale acquiert sa plus grande valeur, toutes choses d'ailleurs égales. A mesure que l'angle α croît à partir de zéro, tg E diminue, et lorsque le plan d'oscillation XOZ de l'aiguille devient normal au plan du méridien, on a, quels que soient n, L, etc..., $\operatorname{tg} E = 0$; *le pendule en équilibre reste donc vertical, quels que soient le sens et la valeur de la rotation initiale* n.

Si l'on fait croître α au-dessus de $\frac{\pi}{2}$, $\cos \alpha$ devenant négatif, tg E change de signe, la position d'équilibre de l'aiguille passe donc de l'autre côté de la verticale, dans le plan d'oscillation, et lorsqu'enfin $\alpha = \pi$, auquel cas le plan d'oscillation coïncide de nouveau avec le plan du méridien, tg E reprend une valeur égale, *et de signe contraire,* à celle qu'il avait pour $\alpha = 0$. Mais comme le plan d'oscillation a aussi tourné de 180°, il est clair que l'aiguille se retrouvera dans la même position d'équilibre qu'au premier instant. En résumé, *le lieu des positions successives d'équilibre de l'aiguille, pour tous les azimuts du plan d'oscillation du pendule, est un cône dont la verticale* OZ' *est une génératrice.*

88. Revenons à l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille, dans le cas général. On simplifie l'intégration en projetant la ligne boréale ON en ON_1, sur le plan d'oscillation (fig. 25). Appelons τ l'angle NON_1 compris entre la ligne boréale et sa projection, ε l'angle N_1OX de cette projection avec

l'horizontale OX ; ξ l'angle $N_1O\mu$ que fait la direction de l'aiguille avec ON_1, compté positivement de ON_1 vers OZ' ; nous aurons évidemment

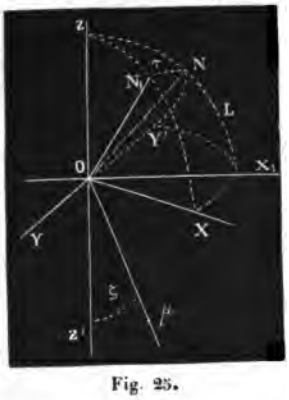


Fig. 25.

$$\xi + \zeta = \frac{\pi}{2} + \varepsilon, \quad d\zeta = -d\xi,$$

$$\cos u = \cos \overline{\mu N} = -\cos\tau\cos\xi,$$

$$\frac{d.\cos u}{d\zeta} = -\cos\tau\sin\xi,$$

et l'équation (151) prendra la forme

$$(156) \qquad \frac{d\xi'}{dt} = \frac{C\omega^2\cos^2\tau}{H_1}\sin\xi\cos\xi - \frac{C\omega l_1\cos\tau - g\mu\delta\sin\varepsilon}{H_1}\sin\xi + \frac{g\mu\delta\cos\varepsilon}{H_1}\cos\xi.$$

Cette équation, qui détermine ξ en fonction de t et fait connaître, par conséquent, le mouvement de l'aiguille dans son plan d'oscillation, se ramène immédiatement à l'équation (77). Il suffit d'y remplacer ξ par ζ et de poser

$$\frac{C\omega^2\cos^2\tau}{H_1} = \omega'^2, \quad \frac{C\omega l_1\cos\tau - g\mu\delta\sin\varepsilon}{H_1} = \frac{g}{r}, \quad \frac{g\mu\delta\cos\varepsilon}{H_1} = -\frac{\omega'^2\Delta}{r},$$

d'où l'on déduit

$$(157) \qquad \begin{cases} \omega' = \omega\cos\tau\sqrt{\dfrac{C}{H_1}}, \\ r = \dfrac{gH_1}{C\omega l_1\cos\tau - g\mu\delta\sin\varepsilon}, \\ \Delta = \dfrac{g^2H_1\mu\delta\cos\varepsilon}{C\omega^2\cos^2\tau\,(g\mu\delta\sin\varepsilon - C\omega l_1\cos\tau)}. \end{cases}$$

Ainsi le mouvement oscillatoire de l'aiguille rentre dans celui du pendule à plan d'oscillation tournant. On pourra, suivant les

signes et les valeurs des données relatives à l'instrument, trouver pour r et Δ des valeurs soit positives, soit négatives. Mais cette dernière circonstance ne soulèvera aucune difficulté, puisque nous savons que les valeurs négatives de r s'interprètent par un changement de sens dans la direction de la pesanteur, et les valeurs négatives de Δ par un changement dans le sens où l'on compte positivement l'angle ζ. Le problème du mouvement oscillatoire de l'aiguille donne donc lieu à cette loi :

Lorsque l'appareil n'est pas dans une position d'équilibre stable (répondant aux valeurs données de n, α, etc), *les oscillations de l'aiguille par rapport à la projection de la ligne boréale sur le plan d'oscillation sont les mêmes que les oscillations, par rapport à la verticale, d'un pendule simple dont le plan d'oscillation tournerait avec une vitesse constante ω' autour d'un axe vertical, la vitesse ω', la longueur* r *du pendule et la distance* Δ *de son point de suspension à l'axe de rotation étant données par les équations* (157).

L'angle ξ s'exprimera donc par une fonction elliptique du temps, le mouvement de l'aiguille sera périodique, et lorsqu'on aura l'expression de t, on en déduira celle de φ, dont dépend la rotation du tore dans sa chape, par l'équation (149), qui donnera

$$\frac{d\varphi}{dt} = n + \omega(\cos u - \cos u_0) = n - \omega \cos\tau (\cos\xi - \cos\xi_0,$$

d'où

$$(158) \quad \varphi = \varphi_0 + nt - \omega \cos\tau \int_0^t (\cos\xi - \cos\xi_0)\, dt.$$

Le problème sera alors entièrement résolu.

Les angles τ et ε que nous venons d'introduire ont avec L et α des relations faciles à trouver. La considération des triangles sphériques NZN_1, $NY'X_1$ donne en effet

$$(159) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sin\varepsilon\cos\tau = \sin L, \\ \cos\varepsilon\cos\tau = \cos\alpha\cos L, \\ \sin\tau = \sin\alpha\cos L. \end{array} \right.$$

On en déduit

$$\cot \varepsilon = \cos \alpha \cot L,$$

d'où

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\cos \alpha \cot L,$$

ce qui vérifie la propriété énoncée (n° 81, I), savoir que la direction ON_1 fait avec la nadirale OZ' un angle dont la tangente est égale à $-\cos \alpha \cot L$.

88. Dans les mouvements relatifs à la surface de la terre, ω étant extrêmement petit, les termes de l'ordre de ω^2 sont négligeables. Si donc nous partons de l'équation (155) où l'on peut alors supprimer le premier terme du second membre, nous aurons

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{2F}{H_1}\left[\cos(\zeta - E) - \cos(\zeta_0 - E)\right]. \tag{160}$$

Cette équation suffit pour montrer que l'angle $\zeta - E$, compris entre la direction de l'aiguille en mouvement et celle de sa position d'équilibre stable, s'exprime en fonction du temps comme l'angle d'un pendule simple avec la verticale, la longueur r du pendule étant donnée par l'équation

$$\frac{g}{r} = \frac{F}{H_1}, \quad \text{ou} \quad r = \frac{gH_1}{F}.$$

Si donc l'aiguille est peu écartée de sa position d'équilibre, la durée d'une demi-oscillation aura pour valeur

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{H_1}{F}},$$

et les valeurs de H_1, F sont données par les équations

$$\begin{cases} H_1 = A + A_1 + \mu\delta^2, \\ F = \sqrt{(C\omega n \cos L \cos \alpha)^2 + (g\mu\delta - C\omega n \sin L)^2}. \end{cases} \tag{161}$$

84. L'appareil que nous venons d'étudier devant fournir des signes sensibles de la rotation terrestre, voici de quelle manière il a été construit et disposé.

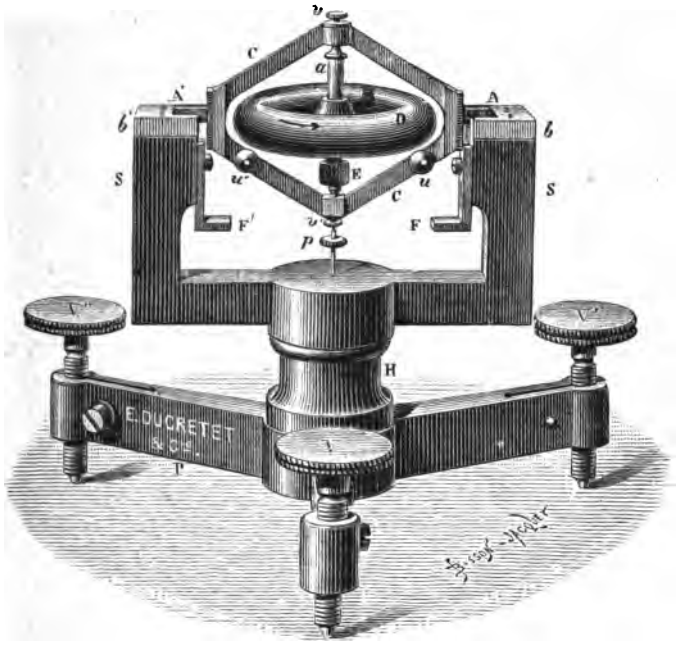


Fig 26.

Le tore D est en bronze (fig. 26); son axe d'acier *a* pivote sur des pointes aiguës dans des tourillons coniques, creusés dans les vis *v*, *v'*, qui traversent une chape CC en acier anglais. Cette chape repose, par les couteaux A et A', sur des surfaces en acier trempé, de forme cylindrique, dont les couteaux occupent le fond. Ce système (D, C) présente une symétrie aussi exacte que possible par rapport au plan passant par l'axe du tore et par les arêtes des couteaux, et sa mobilité autour de celles-ci est telle qu'un souffle léger suffit à provoquer des oscillations. En agissant sur les vis *v*, *v'*, sur les petites masses mobiles *u*, *u'*, on amène par des tâtonnements successifs le centre de gravité du tore et de la chape à se trouver sensiblement sur l'*axe de sus-*

pension ou ligne d'arêtes des couteaux, de façon que le système soit aussi voisin que possible d'un état d'équilibre indifférent autour de cet axe. Mais au moyen du petit curseur *p*, glissant à frottement dur sur l'aiguille implantée dans la tête de la vis inférieure *v'*, on amène l'aiguille et l'axe du tore à prendre, *lorsque le tore* D *est en repos*, une position verticale d'équilibre stable, ce dont on s'assure en faisant osciller le système autour de l'axe de suspension.

Le support S des couteaux est monté sur un pied H, de façon à tourner à frottement gras autour d'un axe vertical; de cette manière, on peut amener successivement dans tous les azimuts le plan vertical passant par l'axe de suspension. Enfin, deux fourchettes F et F', destinées à recevoir les couteaux et à les déposer exactement à la place qu'ils doivent occuper, sont adaptées au support S (*).

L'axe du tore porte un pignon d'acier E, destiné à être mis en rapport avec un système d'engrenages ou rouage accélérateur de Foucault, qui sert à communiquer au tore une rotation extrêmement rapide (environ 150 tours par seconde).

Après avoir, au moyen des vis calantes V, V', V'' et d'un niveau, assuré l'horizontalité de l'axe de suspension, on porte la chape sur le rouage moteur et l'on imprime au tore une rotation rapide, dans un sens déterminé; puis on reporte le système sur son support en le guidant au moyen des fourchettes, et on l'abandonne à lui-même. D'après la théorie exposée ci-dessus, voici les phénomènes qui doivent se produire :

1° La position d'équilibre stable du tore et de la chape ne répond plus, généralement, à une direction verticale de l'aiguille, comme lorsque le tore était en repos, et le maximum de déviation de l'aiguille a lieu quand le plan d'oscillation de celle-ci coïncide avec le plan du méridien. *L'aiguille se portera, par des*

(*) Le constructeur, M. Ducretet, a modifié heureusement la disposition de la figure 26 en manœuvrant ces fourchettes au moyen de leviers reliés ensemble par une tige parallèle à l'arête des couteaux, ce qui maintient ces arêtes au même niveau horizontal et les dépose au même instant sur leurs surfaces d'appui. L'appareil ainsi disposé figure à l'Exposition universelle de 1889 dans la vitrine de la Faculté des sciences de Paris.

oscillations décroissantes, vers le nord ou vers le sud, suivant que le tore tourne de gauche à droite ou de droite à gauche pour l'observateur qui le regarde d'en haut, la déviation étant, toutes choses d'ailleurs égales, plus faible dans le second cas que dans le premier, car, dans l'expression de tg E (153), le dénominateur est une différence dans le premier cas, une somme dans le second.

2° Mais, si le plan d'oscillation de l'axe du tore est normal au plan du méridien, la position d'équilibre stable de l'aiguille sera de nouveau verticale comme lorsque le tore était en repos, et cela, quel que soit le sens de la gyration du tore. On réalise ce changement d'azimut du plan d'oscillation, même pendant l'expérience, en faisant tourner le support S sur son pied, mais il faut d'abord soulever les couteaux sur leurs fourchettes et éviter surtout de tourner le support *en sens contraire* de la rotation du tore, ce qui amènerait instantanément le renversement de tout le système.

3° Dans les azimuts intermédiaires, l'aiguille aura une position d'équilibre plus ou moins inclinée entre les deux extrêmes.

4° Il résulte de l'équation (153) que l'inclinaison de l'aiguille dans le plan du méridien sera d'autant plus marquée que le tore tourne plus rapidement, que son diamètre est plus grand, que l'expérience se fait en un lieu plus rapproché de l'équateur ; que la distance δ est plus petite. On pourrait donc, en profitant de ces circonstances, réaliser une déviation allant jusqu'à l'horizontalité de l'aiguille, si la suspension par couteaux ne s'y opposait.

5° Les formules (161) fournissent aussi des indications précieuses pour la sensibilité de l'instrument. D'après l'équation (153), la déviation de l'aiguille par rapport à la verticale est indépendante de la masse de la chape, mais la durée des oscillations de l'aiguille de part et d'autre de sa position d'équilibre en est influencée. Or, cette durée doit être abrégée autant que possible, si l'on veut que l'appareil soit très sensible. Il faut donc 1° rendre le système très mobile autour de l'axe d'oscillation, ce que la suspension sur couteaux réalise le mieux ; 2° diminuer

la valeur de H_1, c'est-à-dire donner à la chape la plus grande légèreté possible, et éviter toutes les masses accessoires un peu éloignées de l'axe de suspension; 3° augmenter la valeur de F, en donnant au tore un grand diamètre et à la vitesse rotatoire n la valeur maximum que l'on peut employer.

Au reste, les formules permettent de déterminer d'avance les résultats que l'on obtiendra sur des données choisies, et par suite, de modifier celles-ci de façon à arriver par tâtonnements successifs à la disposition la plus avantageuse. C'est ainsi que nous avons procédé pour fournir au constructeur les dimensions et les formes à réaliser (*).

L'instrument, auquel nous avons donné le nom de *barogyroscope*, a été construit avec soin et intelligence dans les ateliers de MM. E. Ducretet et C^ie^, à Paris. Il réalise facilement et de la manière la plus nette tous les phénomènes décrits ci-dessus (**). Nous le croyons très propre à fournir, sans qu'il soit besoin d'une précision merveilleuse dans l'exécution, avec des moyens de contrôle toujours à la disposition de l'opérateur, et dans des limites de prix raisonnables, une expérience facile et décisive pour la démonstration de la rotation de la terre.

(*) Voici un exemple de ce genre de calcul (le décimètre est pris comme unité de longueur) :

TORE : Rayon du cercle générateur = 0,1; distance de son centre à l'axe = 0,35; épaisseur de la plaque centrale = 0,04; rayon de l'axe = 0,03; longueur de l'axe = 0,6.

CHAPE : Diagonales = 0.8; 1,2; dimensions de la section = 0,07; 0,04.

CURSEUR : Diamètre = 0,08; hauteur 0,02. $\delta = 0{,}5$; $\omega = 0{,}000073$; $n = 1256{,}637$ (200 tours par seconde); $g = 98{,}09$; rapport $\frac{D'}{D}$ de la densité de l'acier à celle du bronze = 0,8965; $L = 48°50'39''$.

Résultats : $E = 7°37'10''$; $\tau = 3^s76$.

(**) Ces expériences ont été réalisées d'abord devant les membres de la *Société scientifique* de Bruxelles et, à Paris, devant une commission composée des membres de l'Institut.

§ XIX.

BAROGYROSCOPE DOUBLE.

85. On peut modifier l'appareil précédent de manière à obtenir, pour une même vitesse rotatoire, une déviation beaucoup plus sensible de l'aiguille en même temps qu'un nouveau moyen de contrôle. Il suffit, pour cela, d'associer dans une même chape deux tores bien égaux, à axes parallèles, ayant leurs centres de gravité sur la ligne d'arêtes des couteaux. L'aiguille qui porte le curseur est alors fixée, parallèlement aux axes des tores, à égale distance de ceux-ci, et de façon que sa direction passe par le centre de gravité du système mobile. Ce système est d'ailleurs suspendu de la même manière sur un support susceptible de prendre toutes les positions en azimut.

Conservant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent, plaçons l'origine O au centre de gravité de la chape sur la ligne de suspension, à égale distance des centres des tores. Appelons n, n_1 les rotations initiales respectives des deux tores; φ et φ_1 les angles qui définissent leurs rotations relativement à la chape; un calcul semblable à celui du n° 79 nous donnera

$$T + V = \tfrac{1}{2}(H_1\zeta'^2 + C\varphi'^2 + C\varphi_1'^2) - \omega\left[H_1\zeta' \sin\alpha \cos L + C(\varphi' + \varphi'_1)\cos u\right],$$

H_1 étant le moment d'inertie de tout le système (tores, chape, aiguille et curseur) par rapport à l'axe de suspension, en sorte que

$$H_1 = 2A + A_1 + \mu\delta^2.$$

On a d'ailleurs toujours

$$\cos u = \sin L \cos\zeta - \cos L \cos\alpha \sin\zeta,$$

$$\frac{d.\cos u}{d\zeta} = -(\sin L \sin\zeta + \cos\alpha \cos L \cos\zeta).$$

On tire de l'équation (92)

$$\varphi' - \omega \cos u = l,$$
$$\varphi_1' - \omega \cos u = l_1,$$

et l'on a pour les valeurs des constantes l et l_1,

$$l = n - \omega \cos u_0, \quad l_1 = n_1 - \omega \cos u_0.$$

On trouve ensuite, au moyen de ces relations,

$$H_1 \frac{d\zeta'}{dt} = - C\omega (l + l_1 + 2\omega \cos u) \frac{d \cos u}{d\zeta} - g\mu\delta \sin \zeta,$$

pour l'équation différentielle du mouvement de l'aiguille dans le plan vertical XOZ. On en déduit, pour l'angle E qui correspond à l'équilibre apparent de l'aiguille,

$$(162) \quad \ldots \quad \operatorname{tg} E = \frac{C\omega (n + n_1) \cos L \cos \alpha}{g\mu\delta - C\omega (n + n_1) \sin L},$$

ce qui donne deux positions d'équilibre de l'aiguille. On s'assure, comme au n° 80, que celle qui répond à l'équilibre stable est déterminée par les équations

$$(163) \quad \ldots \quad \begin{cases} F \cos E = g\mu\delta - C\omega (n + n_1) \sin L, \\ F \sin E = C\omega (n + n_1) \cos L \cos \alpha. \end{cases}$$

La discussion de l'équation (162) est semblable à celle de l'équation (153); nous ferons seulement remarquer les particularités suivantes :

1° Concevons que l'on imprime aux tores des vitesses de rotation initiales égales, mais de sens contraire, ce qui donne la relation

$$n_1 = - n,$$

et par suite,

$$\sin E = 0, \quad \cos E = 1.$$

La position d'équilibre de l'aiguille restera donc verticale dans tous les azimuts du plan d'oscillation, et quelle que soit la vitesse n. Ce résultat fournit évidemment un moyen de contrôle pour les expériences.

On réaliserait facilement cette condition en adaptant au rouage moteur une pièce additionnelle permettant de changer à volonté le sens de rotation de l'un des engrenages qui actionnent les pignons des tores.

2° Si l'on désigne par n' la moyenne arithmétique des vitesses initiales n et n_1, que nous supposerons maintenant de même sens, on trouvera

$$\operatorname{tg} E = \frac{2C\omega n' \cos L \cos \alpha}{g\mu\delta - 2C\omega n' \sin L},$$

$$F \cos E = g\mu\delta - 2C\omega n' \sin L,$$

$$F \sin E = 2C\omega n' \cos L \cos \alpha,$$

et l'on voit que, pour une valeur positive de n' égale à celle de n dans l'appareil du § XVIII, le numérateur de tg E serait doublé et le dénominateur notablement diminué, le terme soustractif y étant doublé. L'angle E aurait donc une valeur bien plus grande pour une même vitesse rotatoire. D'ailleurs l'intégration de l'équation en ζ, en négligeant les termes de l'ordre de ω^2, conduirait à

$$\frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{2F}{H_1}\left[\cos(\zeta - E) - \cos(\zeta_0 - E)\right]$$

comme plus haut; les oscillations étant supposées très petites, la durée d'une demi-oscillation serait

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{H_1}{F}},$$

et à cause des relations

$$(164)\quad \begin{cases} H_1 = 2A + A_1 + \mu\delta^2, \\ F = \sqrt{(2C\omega n' \cos L \cos\alpha)^2 + (g\mu\delta - 2C\omega n' \sin L)^2}, \end{cases}$$

on voit facilement que la durée des oscillations sera à peu près la même que dans l'appareil à un tore. On n'aura donc pas augmenté d'une manière notable l'inertie de cette *balance gyroscopique*.

Nous devons dire toutefois que la construction de cet appareil nous paraît présenter des difficultés sensiblement plus grandes que celle du premier, et qu'il nous a donné des résultats moins satisfaisants.

§ XX.

TOUPIE DE FOUCAULT.

86. On trouve, dans le *Recueil des travaux scientifiques* de L. Foucault (p. 410), une note concernant des expériences que ce savant aurait tentées, sur l'influence que la rotation terrestre exerce sur la position d'équilibre apparent d'une toupie, tournant sur sa pointe avec une grande vitesse. Nous avons essayé d'appliquer nos formules à ce problème, qui n'avait pas été étudié à notre connaissance, et nous avons été conduit à quelques résultats intéressants que nous allons exposer.

Problème XIII. — *Un solide de révolution homogène* (toupie), *fixé par un point de son axe de figure à la surface d'une planète en rotation uniforme, a reçu une rotation initiale autour de cet axe, maintenu immobile relativement à la planète. L'axe étant rendu libre, déterminer son mouvement et ses positions d'équilibre apparent.*

O étant le point fixe (fig. 27), soit OXYZ le système de comparaison rectangulaire, lié à la planète et auquel nous rapportons

le mouvement de la toupie. Soit ON la ligne boréale, OX sa projection sur le plan XY; OP la zénithale du point O; u l'angle aigu ZOP qu'elle forme avec OZ; v l'angle QOX compris entre le plan XZ et le plan ZOP, compté positivement de OX vers OY jusqu'à 360°; λ l'inclinaison NOX de la ligne boréale sur le plan XY; $L = \frac{\pi}{2} -$ PON la latitude du point O; $O\zeta$ l'axe de figure de la toupie; $l = OG$ la distance de son centre de gravité au point fixe; θ, ψ et φ les angles d'Euler qui définissent la position du corps par rapport au système OXYZ, comme dans le problème VIII; enfin, C et A les moments d'inertie axial et équatorial de la toupie relatifs au point O. On a d'abord, entre les éléments constants, la relation

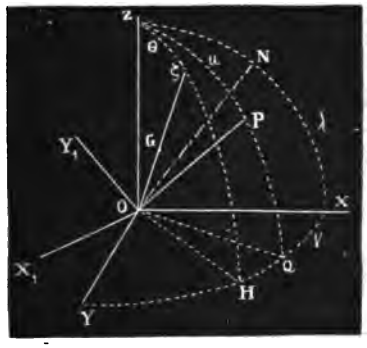


Fig. 27.

$$(165) \quad . \quad . \quad . \quad \sin L = \cos u \sin \lambda + \sin u \cos \lambda \cos v.$$

Nous devons encore faire usage de l'équation (92), et nous trouvons, par une simple répétition du calcul du n° 26,

$$(166) \left\{ \begin{array}{l} T + V = \frac{1}{2}\left[A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)^2\right] \\ \qquad - \omega\left[A\theta' \cos\gamma + A\psi' \sin\theta \cos\gamma_1 + C(\varphi' + \psi' \cos\theta)\cos\gamma_2\right], \end{array} \right.$$

équation dans laquelle les angles γ, γ_1 et γ_2 sont toujours donnés par les relations

$$(55) \quad . \quad . \quad . \left\{ \begin{array}{l} \cos\gamma = \cos\lambda \cos\psi, \\ \cos\gamma_1 = \sin\lambda \sin\theta - \cos\lambda \cos\theta \sin\psi, \\ \cos\gamma_2 = \sin\lambda \cos\theta + \cos\lambda \sin\theta \sin\psi. \end{array} \right.$$

D'autre part, on a évidemment ici

$$\rho = l, \quad \cos\overline{\rho y} = -\cos\zeta OP,$$

et

$$(167) \quad \cos \zeta OP = \cos u \cos \theta + \sin u \sin \theta \sin (\psi - v).$$

On pourrait substituer ces divers résultats dans l'équation (92) où l'on ferait successivement $q = \varphi$, $q = \psi$, $q = \theta$, mais il est plus simple de n'opérer cette substitution qu'après avoir défini chaque problème particulier.

87. Dans le problème XIII tel qu'il est posé, l'axe de la toupie étant entièrement libre autour de la pointe O, on peut choisir arbitrairement le système de comparaison OXYZ, et il sera commode de diriger l'axe OZ suivant la ligne boréale ON (fig. 28). On aura donc

Fig. 28.

$$\lambda = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos \lambda = 0,$$

$$u = \frac{\pi}{2} - L,$$

et la projection OX de OZ sur le plan XY ayant une direction quelconque, on la prendra suivant la projection de OP sur ce plan, ce qui donnera $v = 0$. On aura, par suite,

$$\cos \gamma = 0, \quad \cos \gamma_1 = \sin \theta, \quad \cos \gamma_2 = \cos \theta,$$

$$\cos \zeta OP = \sin L \cos \theta + \cos L \sin \theta \sin \psi,$$

et la valeur de T + V se réduira à

$$T + V = \frac{1}{2} \left\{ A\theta'^2 + A (\psi' - \omega)^2 \sin^2 \theta + C \left[\varphi' + (\psi' - \omega) \cos \theta \right]^2 \right\}$$

$$- \frac{\omega^2}{2} (A \sin^2 \theta + C \cos^2 \theta),$$

d'où l'on déduira facilement, au moyen de l'équation (92),

$$(168)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\,C\left[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta\right] = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\left\{A(\psi' - \omega)\sin^2\theta + C\left[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta\right]\cos\theta\right\} \\ \qquad = -Mgl\cos L\sin\theta\cos\psi, \\ A\dfrac{d\theta'}{dt} - A(\psi' - \omega)^2\sin\theta\cos\theta + C\left[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta\right](\psi' - \omega)\sin\theta \\ \qquad + \omega^2(A - C)\sin\theta\cos\theta = Mgl(\sin L\sin\theta - \cos L\cos\theta\sin\psi). \end{cases}$$

La première donne, par l'intégration,

$$(169)\quad \ldots\ldots\quad \varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta = l_1,$$

l_1 étant une constante dont la valeur sera, si l'on désigne par n la vitesse de rotation initiale de la toupie autour de son axe,

$$(170)\quad \ldots\ldots\quad l_1 = n - \omega\cos\theta_0.$$

Éliminant φ' au moyen de la relation (169), des deux dernières équations (168), on aura enfin

$$(171)\quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left[A(\psi' - \omega)\sin^2\theta + Cl_1\cos\theta\right] = -Mgl\cos L\sin\theta\cos\psi, \\ A\dfrac{d\theta'}{dt} - A(\psi' - \omega)^2\sin\theta\cos\theta + Cl_1(\psi' - \omega)\sin\theta - \omega^2(C - A)\sin\theta\cos\theta \\ \qquad = Mgl(\sin L\sin\theta - \cos L\cos\theta\sin\psi). \end{cases}$$

Ces deux équations différentielles du second ordre déterminent θ et ψ en fonction du temps. Il ne nous a pas été possible de réussir à les intégrer, sauf une intégrale qui correspond au théorème des forces vives. Nous nous sommes donc proposé seulement d'en déduire les lois du phénomène observé par Foucault, relativement à la position d'équilibre de l'axe de la toupie.

Cherchons, pour cela, les conditions nécessaires pour que θ et

ψ restent invariables, θ'_0 et ψ'_0 étant d'ailleurs supposés nuls. Il est facile de voir qu'il suffit pour cela que l'on ait

$$\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{d\psi'}{dt}\right)_0 = 0.$$

Or, la première des équations (171) nous donne

$$\left(\frac{d\psi'}{dt}\right)_0 = -\frac{Mgl \cos L \cos \psi_0}{A \sin \theta_0},$$

et si nous laissons de côté l'hypothèse $\cos L = 0$, qui ne se réalise qu'au pôle, nous ne pouvons vérifier la deuxième condition de l'équilibre de l'axe qu'en supposant $\cos \psi_0$ nul, ce qui nous donne

$$\psi_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ou} \quad \psi_0 = \frac{3\pi}{2};$$

donc, l'*axe* $O\zeta$ *doit être dans le plan du méridien* NOP. La seconde équation (171) devient alors, pour $\theta = \theta_0$ et $\psi = \psi_0$, et en ayant égard à la relation (170),

$$A\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)_0 = C\omega n \sin \theta_0 + Mgl(\sin L \sin \theta_0 - \cos L \cos \theta_0 \sin \psi_0).$$

Nous pouvons poser $\sin \psi_0 = 1$, car la supposition $\psi_0 = \frac{3\pi}{2}$ se rapporte à une position de $O\zeta$ de l'autre côté de OZ par rapport à OP, et nous ramènerons ce cas au premier en prenant $\psi_0 = \frac{\pi}{2}$ et attribuant à θ_0 une valeur négative. La première condition d'équilibre nous donne alors l'équation

$$C\omega n \sin \theta_0 - Mgl \cos (L + \theta_0) = 0.$$

Pour mieux analyser les positions correspondantes de l'axe, désignons par E l'angle que fait l'axe $O\zeta$ en équilibre, dans le plan du méridien, avec la zénithale OP, angle compté positivement de OP vers le nord et négativement vers le sud. Nous avons alors, en général,

$$\theta_0 + E = \frac{\pi}{2} - L,$$

ce qui transforme l'équation d'équilibre comme il suit :

$$C\omega n \cos (L + E) - Mgl \sin E = 0,$$

d'où l'on tire

$$(172) \quad \ldots\ldots \operatorname{tg} E = \frac{C\omega n \cos L}{Mgl + C\omega n \sin L}.$$

Cette équation définit deux directions opposées, dont l'une seulement appartient au problème, puisque l'autre, dirigée suivant son prolongement, placerait le centre de gravité G au-dessous du point fixe, ce que nous ne supposons pas ici. Il y a donc une seule position d'équilibre apparent, et elle ne coïncide pas avec la verticale, à moins que l'on n'ait $\omega = 0$ ou $n = 0$.

En nous bornant à considérer le cas du globe terrestre, dans lequel ω a une valeur très petite, le terme $C\omega n \sin L$ sera nécessairement très petit vis-à-vis de Mgl (à moins que l ne soit lui-même très petit, ce qui n'est pas le cas dans l'expérience tentée par Foucault). L'angle E aura donc lui-même une très petite valeur, et la formule (172) pourra être remplacée, avec une approximation suffisante, par celle-ci :

$$(173) \quad \ldots\ldots E = \frac{C\omega n \cos L}{Mgl}.$$

On voit que E sera positif ou négatif suivant que n sera > 0 ou < 0, et que, pour assurer à l'angle E une valeur aussi grande que possible, de façon qu'il devienne observable, on devra donner à la toupie une forme telle que $\frac{C}{M}$ ait la plus grande valeur et lui imprimer une rotation n aussi rapide qu'on le pourra. Le résultat de cette analyse est donc le suivant :

Lorsqu'une toupie tourne rapidement sur sa pointe, supposée fixe à la surface de la terre, son axe ne peut garder une direction invariable par rapport à celle-ci que si cette direction est dans le plan du méridien, faisant un très petit angle avec la zénithale, vers le nord si la rotation de la toupie est de gauche à droite vue du dessus, et vers le sud si elle est de droite à gauche. L'équation (173) *détermine ce petit angle.*

C'est bien là le résultat obtenu par Foucault, sauf peut-être pour le sens de l'inclinaison de l'axe qui, dans la note rappelée ci-dessus, est énoncé en termes assez ambigus. Il ne paraît pas, au reste, que l'expérience ait été menée jusqu'au bout par

l'illustre physicien, car Foucault a laissé en blanc les chiffres que l'expérience lui avait fournis (*).

88. La position d'équilibre indiquée par l'équation (173) est une position d'équilibre *stable*, dans le sens où ce terme s'applique à une toupie libre, c'est-à-dire que si la vitesse n a une valeur très grande et que l'axe soit très peu écarté de cette position d'équilibre, il ne s'en écartera jamais que très peu par un mouvement de précession et de nutation. Mais ce résultat nous paraît difficile à établir d'une manière rigoureuse sans effectuer l'intégration des équations (171), laquelle semble impraticable. Le seul résultat que nous ayons obtenu est l'intégrale.

$$A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + C\omega\cos\theta(2l_1 + \omega\cos\theta) + 2Mgl\cos\zeta OP = h,$$

h étant une constante à déterminer par les données initiales.

89. Problème XIV. — Nous supposerons maintenant que, par un procédé quelconque, *on assujettisse l'axe* $O\zeta$ *de la toupie à rester dans un plan déterminé par rapport à la planète, sans frottement, et qu'après lui avoir imprimé une rotation initiale autour de cet axe immobile, on l'abandonne à elle-même. Quel sera son mouvement?*

Fig. 29.

L'analogie de ce problème avec d'autres déjà traités nous permettra d'abréger.

Il conviendra ici de prendre pour plan XY (fig. 29) le plan directeur, l'axe OZ faisant un angle aigu u avec la zénithale OP.

(*) En analysant des erreurs constantes qui se produisaient dans l'emploi du *gyroscope collimateur* de M. le commandant Fleuriais, M. Baule a soupçonné l'influence de la rotation de la terre sur cette *toupie de Foucault*, et, traitant le problème par une méthode nouvelle, a retrouvé les formules ci-dessus. La correction qu'il en a déduite est des plus satisfaisantes. (Voir les *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 12me année, p. 177.)

On aura alors

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \theta' = 0,$$

$$\cos\gamma = \cos\lambda\cos\psi, \quad \cos\gamma_1 = \sin\lambda, \quad \cos\gamma_2 = \cos\lambda\sin\psi.$$

$$\cos\zeta OP = \sin u\sin(\psi - v).$$

L'équation (166) se réduisant à

$$T + V = \tfrac{1}{2}(A\psi'^2 + C\varphi'^2) - \omega(A\psi'\sin\lambda + C\varphi'\cos\lambda\sin\psi),$$

on tire de l'équation (92) les deux équations différentielles

$$\varphi' - \omega\cos\lambda\sin\psi = l_1,$$

$$A\frac{d\psi'}{dt} + C\omega\cos\lambda(l_1 + \omega\cos\lambda\sin\psi)\cos\psi = -Mgl\sin u\cos(\psi - v).$$

Introduisons, au lieu de ψ, l'angle $\zeta = \psi - \frac{\pi}{2}$ que fait $O\zeta$ avec OX. Les équations deviendront

$$(174)\quad \begin{cases} \varphi' = l_1 + \omega\cos\lambda\cos\zeta, \\ A\dfrac{d\zeta'}{dt} = C\omega\cos\lambda(l_1 + \omega\cos\lambda\cos\zeta)\sin\zeta + Mgl\sin u\sin(\zeta - v), \end{cases}$$

avec la relation

$$l_1 = n - \omega\cos\lambda\cos\zeta_0.$$

Pour que l'axe reste en équilibre relatif, ζ'_0 étant nul, il faut et il suffit que ζ_0 soit une des valeurs de E déterminées par l'équation

$$(175)\quad \ldots \quad \operatorname{tg} E = \frac{Mgl\sin u\sin v}{C\omega n\cos\lambda + Mgl\sin u\cos v}.$$

Ces valeurs sont au nombre de deux, correspondant à des directions opposées. Pour trouver celle qui donne l'équilibre stable, on procède comme au n° 80, c'est-à-dire que l'on pose

$$(176)\quad \ldots \quad \begin{cases} Mgl\sin u\sin v = -F\sin E, \\ C\omega n\cos\lambda + Mgl\sin u\cos v = -F\cos E, \end{cases}$$

équations qui, F étant supposé positif, définiront complètement l'angle E. La dernière équation (174) s'intégrera sous la forme

$$A\frac{d\zeta^2}{dt^2} = -C\omega^2\cos^2\lambda(\cos\zeta - \cos\zeta_0)^2 + 2F\left[\cos(\zeta - E) - \cos(\zeta_0 - E)\right],$$

et l'on verra immédiatement que l'on aura toujours

$$\cos(\zeta - E) - \cos(\zeta_0 - E) > 0;$$

d'où il suit que l'*angle* E *qui répond à l'équilibre stable est précisément celui que définissent les équations* (176). Donc 1° si l'on a

$$C\omega n \cos\lambda + Mgl \sin u \sin v < 0,$$

ce qui ne pourra avoir lieu, si v est plus petit que $\frac{\pi}{2}$, que pour des valeurs négatives et très considérables de n, on aura

$$\cos E > 0,$$

la droite OE qui répond à l'équilibre stable fera donc un angle aigu avec OX, projection de la ligne boréale ON sur le plan directeur. De plus, sin E et sin v étant de signes contraires, OE sera de l'autre côté de OX par rapport à la projection de OP sur XY.

2° Si l'on a

$$C\omega n \cos\lambda + Mgl \sin u \cos v = 0,$$

cos E sera nul, la position d'équilibre stable OE sera normale au plan ZON; elle sera du côté OY ou du côté opposé, suivant que l'on aura

$$\sin v < 0 \quad \text{ou} \quad > 0.$$

3° Enfin, si $C\omega n \cos\lambda + Mgl \sin u \cos v$ est < 0, cos E est négatif, la direction d'équilibre stable fait un angle obtus avec OX. En résumé,

La position d'équilibre stable de l'axe de la toupie fait un angle aigu ou obtus avec la projection de la ligne boréale sur le plan directeur, suivant que l'expression

$$C\omega n \cos\lambda + Mgl \sin u \cos v$$

est négative ou positive; et elle est toujours, par rapport à cette projection, du côté opposé à celui où tombe la projection de la zénithale OP *sur le plan directeur.*

90. L'équation (174) qui définit ζ, mise sous la forme

$$\frac{d\zeta'}{dt} = \frac{C\omega^2 \cos^2\lambda}{A} \sin\zeta\cos\zeta + \frac{C\omega l_1 \cos\lambda + Mgl \sin u \cos v}{A} \sin\zeta - \frac{Mgl \sin u \sin v}{A} \cos\zeta,$$

devient identique avec l'équation (77) si l'on pose

$$(177)\ldots \begin{cases} \omega' = \omega \cos\lambda \sqrt{\dfrac{C}{A}}, \\ r = -\dfrac{gA}{C\omega l_1 \cos\lambda + Mgl \sin u \cos v}, \\ \Delta = -\dfrac{g^2 MAl \sin u \sin v}{C\omega^2 \cos^2\lambda\,(C\omega l_1 \cos\lambda + Mgl \sin u \cos v)}. \end{cases}$$

Donc *le mouvement de l'axe de la toupie dans son plan directeur est encore celui d'un pendule simple dont le plan d'oscillation tourne autour d'un axe vertical d'un mouvement uniforme, les éléments* ω', r, Δ *de ce pendule de comparaison étant fournis par les relations* (177).

Nous indiquerons encore quelques cas particuliers remarquables :

I. A la surface de la terre, ω étant très petit, on négligera ω^2, l'équation différentielle du mouvement de l'axe $O\zeta$ se réduira à

$$(178)\ldots \frac{d\zeta^2}{dt^2} = \frac{2F}{A}\left[\cos(\zeta - E) - \cos(\zeta_0 - E)\right],$$

et par suite, *l'axe* $O\zeta$ *de la toupie oscillera, de part et d'autre de sa position d'équilibre stable* OE, *comme un pendule simple ayant pour longueur*

$$r = \frac{Ag}{F};$$

la valeur de F, déduite des équations (176), est celle-ci :

$$(179)\quad F = \sqrt{(Mgl \sin u \sin v)^2 + (C\omega n \cos\lambda + Mgl \sin u \cos v)^2}.$$

II. Si l'on conserve les termes de l'ordre de ω^2, mais que l'on suppose le plan directeur normal au plan du méridien, on aura $v = 0$, u étant positif ou négatif suivant que OP et ON tombent du même côté de OZ, ou non. De plus, u sera égal à $L - \lambda$, et les équations (177) se réduiront à

$$\omega' = \omega \cos\lambda \sqrt{\frac{C}{A}}, \quad r = -\frac{gA}{C\omega l_1 \cos\lambda + Mgl \sin(L-\lambda)}, \quad \Delta = 0,$$

de sorte que l'on retombera dans le mouvement étudié aux paragraphes II et III.

III. Si l'on suppose, de plus, que OZ se confonde avec ON, ou que le plan directeur soit parallèle au plan de l'équateur de la planète, on aura

$$\lambda = \frac{\pi}{2}, \quad u = L - \frac{\pi}{2},$$

et l'équation différentielle en ζ se réduira à

$$\frac{d\zeta'}{dt} = -\frac{Mgl \cos L}{A} \sin\zeta, \tag{180}$$

c'est-à-dire *à l'équation du mouvement d'un pendule simple dont la longueur serait donnée par la formule*

$$r = \frac{A}{Ml \cos L},$$

d'où résulte un théorème facile à énoncer.

91. Il importe d'observer que nos formules ne peuvent être appliquées au cas où l'on aurait $L = \frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire où la pointe de la toupie coïnciderait avec le pôle boréal de la planète. Il est clair, en effet, que la direction et l'intensité de la réaction centrifuge due à la rotation de l'astre seraient ici essentiellement variables d'un point à l'autre du solide en mouvement, et l'hypothèse sur laquelle est fondée l'équation (92) s'écarterait trop de la réalité.

Pour traiter le problème avec une rigueur complète dans ce

cas, *quelle que soit la vitesse* ω, nous admettrons seulement que la planète attire chaque point de la toupie comme si sa masse entière était réunie en un point C situé sur l'axe de rotation de l'astre, supposition qui sera très sensiblement exacte si la planète est composée de couches concentriques à très peu près sphériques et homogènes. L'axe OZ étant pris suivant l'axe de rotation de la planète, reprenons l'équation générale

$$(2) \quad \ldots\ldots \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{\partial q'} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = \frac{\partial (U + N)}{\partial q}$$

Nous aurons encore ici, comme dans la question du polytrope,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}\left[A\theta'^2 + A(\psi' - \omega)^2 \sin^2\theta + C(\varphi' + \overline{\psi' - \omega}\cos\theta)^2\right]$$

Le point O, situé sur l'axe de la planète, a une accélération nulle; donc $N = 0$. Enfin, si w désigne la distance d'un point quelconque de la toupie au centre d'attraction C de la planète, ε un facteur constant, on aura, pour la fonction U des forces que l'attraction de la planète développe sur les points de la toupie,

$$dU = -\sum \frac{\varepsilon m}{w^2} dw = d.\sum \frac{\varepsilon m}{w} = d.\varepsilon W,$$

W *désignant le potentiel du corps tournant sur le centre d'attraction* C. On a donc $U = \varepsilon W$, et par suite

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T_2}{dq'} - \frac{\partial T_2}{\partial q} = \varepsilon \frac{\partial W}{\partial q},$$

d'où l'on tire successivement, par l'expression de T_2,

$$(181) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\left[\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta\right] = \varepsilon \dfrac{\partial W}{\partial \varphi} \\ \dfrac{d}{dt}\left[A(\psi' - \omega)\sin^2\theta + C(\varphi' + \overline{\psi' - \omega}\cos\theta)\cos\theta\right] = \varepsilon \dfrac{\partial W}{\partial \psi}, \\ A\dfrac{d\theta'}{dt} - A(\psi' - \omega)^2 \sin\theta\cos\theta + C(\varphi' + \overline{\psi' - \omega}\cos\theta)(\psi' - \omega)\sin\theta \\ \qquad = \varepsilon \dfrac{\partial W}{\partial \theta}. \end{array} \right.$$

Mais, à cause de la symétrie du mobile autour de son axe de figure, et de la symétrie supposée des couches de la planète autour de l'axe de rotation CO, W ne peut dépendre, ni de l'angle φ, ni de l'angle ψ, mais seulement de θ. On a donc

$$\frac{\partial W}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0,$$

et par suite, l_1 et l_2 étant des constantes faciles à déterminer,

$$\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta = l_1,$$
$$A(\psi' - \omega)\sin^2\theta + Cl_1\cos\theta = l_2.$$

La seconde de ces relations donne

$$\psi' - \omega = \frac{l_2 - Cl_1\cos\theta}{A\sin^2\theta},$$

valeur qui, substituée dans la troisième équation (181) avec la valeur de $\varphi' + (\psi' - \omega)\cos\theta$, conduit à l'équation

$$A\frac{d\theta'}{dt} - \frac{(l_2 - Cl_1\cos\theta)^2}{A\sin^4\theta}\sin\theta\cos\theta + \frac{Cl_1(l_2 - Cl_1\cos\theta)\sin\theta}{A\sin^3\theta} = \varepsilon\frac{\partial W}{d\theta},$$

dont l'intégrale est

$$(182) \quad . \quad . \quad . \quad A\frac{d\theta^2}{dt^2} + \frac{(l_2 - Cl_1\cos\theta)^2}{A\sin^2\theta} = \varepsilon W + l_3.$$

On arrive donc à une équation du premier ordre, qui s'intégrera par quadrature toutes les fois que l'on connaîtra, en fonction de l'angle θ, l'expression du potentiel W.

Les conséquences mécaniques de cette équation (182) sont, d'ailleurs, faciles à énoncer.

NOTE PREMIÈRE.

Dans l'étude des mouvements relatifs à la surface de la terre, on se contente d'ordinaire de l'approximation obtenue en négligeant les termes de l'ordre du carré ω^2 de la vitesse de rotation de la terre, et en effet, ces termes sont tellement petits que l'approximation est plus que suffisante pour l'explication de tous les phénomènes observables. Lorsqu'on veut tenir compte dans le calcul des quantités de cet ordre, comme l'ont fait Binet, MM. Quet, Bour et Lottner, par exemple, la question se complique extrêmement, car il n'est plus permis alors de négliger, comme l'ont fait ces géomètres, diverses quantités du même ordre de grandeur, provenant des variations d'intensité et de direction de la pesanteur dans un petit espace, de l'influence inégale du soleil et de la lune sur les divers points du globe, du mouvement de la mer, etc...; quantités dont la présence complique les équations au point d'en rendre l'intégration impossible dans tous les cas.

Il faut voir dans une thèse de M. Bertram (*) et surtout dans le beau mémoire que M. V. Puiseux a publié sur ce sujet dans les *Annales scientifiques de l'école normale supérieure* (**) les développements intéressants que comporte cette question.

Ce n'est pas sous cet aspect complexe que nous avons, dans la troisième et la quatrième partie de ce mémoire, étudié les mouvements gyroscopiques à la surface d'une planète dont la rotation peut être assez rapide pour qu'on doive tenir compte des termes en ω^2. Nous avions alors le choix entre deux hypothèses simplificatives : 1° ou bien, comme MM. Purser, Bour, Lottner,

---

(*) *Probleme der Mechanik in Bezug auf die Variationen der Schwere und Rotation der Erde*, Berlin, 1869.

(**) *De l'équilibre et du mouvement des corps pesants en ayant égard aux variations d'intensité et de direction de la pesanteur*, t. I, 2e série, p. 23, 1872. — M. Puiseux avait développé ces théories dès 1855 au Collège de France.

regarder *l'attraction*, c'est-à-dire la force absolue, comme constante dans le petit espace où se passent les phénomènes, tandis que l'on tient compte des variations de la force centrifuge ; cette conception est peut-être la plus conforme à la réalité des choses, son exactitude n'étant influencée ni par la valeur de ω, ni par la latitude ; — ou bien, comme l'a fait M. Quet, attribuer la constance de direction et d'intensité à la résultante de l'attraction et de la force centrifuge, c'est-à-dire à la pesanteur.

Nous avons préféré prendre pour base cette dernière hypothèse, d'abord parce que, toutes deux conduisant aux mêmes résultats lorsque l'on supprime ensuite les termes de l'ordre de ω^2, ce choix n'offrait aucun inconvénient au point de vue des résultats susceptibles d'être contrôlés par les expériences à la surface de la terre, et nous fournissait l'occasion de traiter de nouveaux problèmes d'analyse, dont les solutions seront applicables à des problèmes de mécanique nouveaux, comme nous comptons le montrer ultérieurement. D'ailleurs, la supposition adoptée par Bour nous aurait ramené aux mêmes équations que le polytrope de M. Sire nous avait déjà fournies : c'était donc un problème résolu. En second lieu, l'hypothèse contraire conduit, comme nous l'avons remarqué (n° 52), à certaines conséquences d'aspect paradoxal, telles que celles-ci, qu'un système gyroscopique suspendu par son centre de gravité et n'ayant reçu aucune impulsion initiale ne reste pas en équilibre relatif, ce qui n'a plus lieu dans notre supposition.

Mais le principal avantage consiste en ce que, considérant l'attraction comme la résultante de la pesanteur et de la force centripète, nous avons pu mettre les équations des mouvements relatifs sous une forme extrêmement simple (92, 93) et en déduire un théorème remarquable. C'est grâce à cela que nous avons pu traiter aussi facilement les problèmes dans lesquels la pesanteur intervient avec la rotation de la terre sur les appareils gyroscopiques, donner la théorie des expériences inédites de Foucault sur la toupie, du pendule de M. Sire soumis à l'influence du mouvement du globe, et celle du barogyroscope.

NOTE DEUXIÈME.

Le mouvement d'un point pesant sur un cercle tournant autour d'une sécante verticale (§ IX), qui est le type auquel nous avons ramené plusieurs mouvements importants dans les appareils gyroscopiques, est susceptible encore d'autres applications curieuses. Ainsi, dans le mémoire cité ci-dessus, M. V. Puiseux a établi que, si un corps pesant est mobile autour d'un axe vertical passant par son centre de gravité, et si l'on tient compte des petites forces perturbatrices énumérées plus haut, l'équation du mouvement de ce corps serait celle-ci :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} - \alpha \sin\psi \cos\psi + \beta \sin\psi + \gamma \cos\psi = 0 \text{ (*)}.$$

ψ désigne l'angle dont dépend la rotation du corps, α, β, γ sont des constantes qui dépendent de la constitution du corps, etc. Il suit évidemment de cette équation :

1° Qu'il existera quatre ou seulement deux positions d'équilibre pour le corps autour de l'axe, ce que M. Puiseux avait déjà remarqué, et que ces positions se construiront d'après les règles que nous avons données (n° 38);

2° Que, hors du cas d'équilibre, le corps exécutera des oscillations dont la loi sera la même que celle des oscillations d'un point pesant, sur un cercle dont le plan tourne uniformément autour d'une droite verticale, et les éléments de ce pendule de comparaison seront donnés facilement au moyen de α, β, γ.

(*) Mém. cité, p. 47.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT 1

INTRODUCTION III

PREMIÈRE PARTIE.

§ I. Équations fondamentales 1

§ II. PROBLÈME I. — Pendule dont le plan d'oscillation tourne autour d'un axe vertical passant par le point de suspension. 5

§ III. Développement analytique de la solution 14

§ IV. PROBLÈME II. — Gyroscope dont l'anneau extérieur tourne uniformément autour d'un de ses diamètres. Oscillations de l'axe du tore 25

§ V. (*Suite.*) Rotation du tore dans son plan 37

§ VI. Polytrope de M. Sire. PROBLÈME III. — L'axe du tore est libre dans tous les sens. 48

§ VII. Polytrope de M. Sire. (*Suite.*) PROBLÈME IV. — L'axe du tore ne peut se mouvoir que dans un plan normal à l'axe de l'anneau extérieur 58

§ VIII. Polytrope de M. Sire. (*Suite.*) PROBLÈME V. — L'axe du tore ne peut se mouvoir que dans un plan passant par l'axe de l'anneau extérieur 66

DEUXIÈME PARTIE.

§ IX. PROBLÈME VI. — Mouvement d'un point pesant sur un cercle qui tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'une sécante verticale 78

§ X. PROBLÈME VII. — Pendule gyroscopique de M. Sire 83

TROISIÈME PARTIE.

Mouvements relatifs à la surface d'une planète douée d'un mouvement de rotation uniforme.

Pages

§ XI. Équations générales 102
§ XII. Mouvement apparent d'un gyroscope de Foucault complet . 105
§ XIII. (*Suite.*) Détermination des angles ψ et φ en fonction du temps. 117
§ XIV. (*Suite.*) Formules pour le cas où n est négatif 127
§ XV. Mouvement du gyroscope de Foucault (*suite*) 136
§ XVI. Gyroscope de Foucault (*suite*) 147

QUATRIÈME PARTIE.

Mouvements apparents à la surface d'une planète lorsque la pesanteur intervient.

§ XVII. Pendule gyroscopique 155
§ XVIII. Barogyroscope. 162
§ XIX. Barogyroscope double. 177
§ XX. Toupie de Foucault 180
Note première 193
Note deuxième. 195